КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

*Институт вычислительной математики
и информационных технологий*

А.В. Казанцев

ОСНОВЫ АКТУАРНЫХ РАСЧЕТОВ СТРАХОВАНИЯ ЖИЗНИ

Учебное пособие

Казань
2015

УДК 519.2+368
ББК 22.17
К14

Печатается по решению
методической комиссии Института вычислительной
математики и информационных технологий

Научный редактор
докт. физ.-мат. наук, проф. **И.Н. Володин**

Рецензенты:
докт. физ.-мат. наук, зав. каф. анализа данных
и исследования операций КФУ, проф. **М.Д. Миссаров**;
докт. экон. наук, проф. каф. менеджмента и предпринимательской
деятельности КНИТУ, проф. **Г.В. Семенов**

Казанцев А.В.
К14 **Основы актуарных расчетов страхования жизни:** учеб. пособие / А.В. Казанцев. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. – 194 с.

ISBN 978-5-00019-368-6

Учебное пособие посвящено классическим разделам актуарной математики страхования жизни. Особое внимание уделено применению методов математического анализа и теории вероятностей. Для студентов специальностей «Прикладная математика и информатика» и «Математические методы в экономике». Пособие адресуется всем студентам математических и экономических специальностей, изучающим приложения теории вероятностей и математической статистики.

ISBN 978-5-00019-368-6

Посвящается
Юрию Деточкину

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Признаюсь совершенно откровенно: я не люблю Прогрессоров, хотя сам был, по-видимому, одним из первых Прогрессоров еще в те времена, когда это понятие употреблялось только в теоретических выкладках»[1].

Подобно Максиму Каммереру, который, даст Бог, произнесет эти слова лет эдак через двести, составитель настоящего пособия честно признается, что не любит ни актуариев, ни актуарную математику. Хотя сам был, по-видимому, одним из первых «постсоветских» актуариев еще в те времена, когда это понятие только возвращалось в обиход начала 90-х после долгого забвения.

Помню, было нас «три товарища», двое из них – известные ученые, впоследствии возглавившие кафедры, третий – автор этих строк. Мы делали актуарные расчеты для какой-то компании, и нам даже что-то за это заплатили. Миссия была бы гораздо более трудновыполнимой, если бы за восемьдесят с небольшим лет до этого С.Е. Савич не переработал свой знаменитый трактат по актуарной математике страхования жизни, столь своевременно обнаруженный нами в университетской библиотеке.

С актуарной литературой было непросто и в последующие годы, когда от автора этих строк ожидали учебных пособий по страхованию жизни, а он вяло отбивался «из соображений суеверия» – заниматься *исчислениями смерти* казалось ему не просто кощунственным, но и очень опасным. Таким же это кажется ему и теперь, однако после знакомства с «современными» аналогами моделей Савича стало понятно, что и модели, и их аналоги суть достояния предшествующего технологического уклада и что ими не нужно *заниматься* – их должно *изучать* как исторический артефакт.

Тем не менее, «проблему оберега» в сферах человеческой деятельности, объективно связанных с эсхатологией, автор считает не менее важной, чем сами эти сферы. Именно из-за крушения того самого «предшествующего технологического уклада» и прежде всего из-за его

---

[1] *Братья Стругацкие.* Жук в муравейнике. Цит. по [*АБС*], с. 271.

крушения в головах людей. Наука перестала защищать человека от сомнений, да и он к ней теперь не «заявится с лопатами и вилами» – ему уже не нужно никуда бежать, чтобы «выправить дефект». Массовика-затейника, заученно и бодро рекламирующего достижения научно-технического прогресса, на «посту» властителя дум давно сменил козыряющий ветхостью проповедник со своим извечным *memento mori*.

И вообще, «ошибка ученого – это, в конечном счете, его личное дело. А мы ошибаться не должны. Нам разрешается прослыть невеждами, мистиками, суеверными дураками. Нам одного не простят: если мы недооценили опасность. И если в нашем доме вдруг завоняло серой, мы просто не имеем права пускаться в рассуждения о молекулярных флюктуациях – мы обязаны предположить, что где-то рядом объявился черт с рогами, и принять соответствующие меры, вплоть до организации производства святой воды в промышленных масштабах. И слава Богу, если окажется, что это была всего лишь флюктуация и над нами будет хохотать весь Мировой Совет и все школяры в придачу...»[2].

Именно поэтому в качестве «почетного святого» настоящей работы мы избрали культового героя шестидесятых Юрия Деточкина – не пускавшегося в рассуждения, но сразу принимавшего соответствующие меры, пусть и спорные с точки зрения традиционного уклада. Ипостаси Деточкина – страховой агент, автогонщик и актер народного театра, играющий Гамлета, – мистическим образом напомнили автору тех трех товарищей, с которых когда-то «все начиналось».

Значит, «молитва услышана», и автор, наконец, может отдать свой старый долг ожиданиям девяностых, открывающим ему дорогу к настоящему учебному пособию.

А. Казанцев,
сентябрь 2014 г.

---

[2] *Ibid.* с. 419. Цитирование в предшествующем абзаце – «с лопатами и вилами» – относится к знаменитой песне Владимира Высоцкого «Товарищи ученые», в последующем – «почетный святой» – к фильму Марка Захарова по пьесе Евгения Шварца «Обыкновенное чудо». Подобные цитатные вкрапления в будущем постараемся не оговаривать ввиду их общеупотребимости.

ВВЕДЕНИЕ

И мы должны на очной ставке с прошлым
Держать ответ…

Из к/ф «Гамлет»

I

«– Никокта! – повторил швейцарец, в восторге от того, что такой человек, как Атос, хоть в этом ему завидует. – Никокта! Никокта!»

Нет, дело не в том, что мы не согласны со словами Клавдия в переводе Б.Л. Пастернака или с тем, что эти слова произносит именно Клавдий, а не следователь... Не замахиваемся мы и «на Вильяма, сами понимаете, нашего Шекспира». Хотя иногда и кажется, что Гамлет заплатил слишком высокую цену...

Нет, здесь дело в самом швейцарце, точнее, его образе, созданном Александром Дюма. Пожалуй, это единственный образ швейцарца, имеющийся в советском культурном багаже. Да, мы помним комиссара Берлаха, но, как и его автор, Фридрих Дюрренматт, это скорее собирательный образ западного европейского гуманиста и антифашиста, чем собственно швейцарца.

Тем более ценным для нас является открытие Ханса-Ульриха Гербера как швейцарца, которому можно позавидовать в том, что он актуарный математик с мировым именем. Или хотя бы в том, что этот замечательный ученый обрел себя в США и с коллективом единомышленников написал книгу, о которой речь пойдет ниже и которой по существу посвящено настоящее пособие.

Работы Х.-У. Гербера известны в России давно – как по линии «РЖ "Математика"», так и по переводу известной монографии «Математика страхования жизни», вышедшей в 1995 г. в издательстве «Мир» под эгидой Швейцарской Ассоциации Актуариев в Цюрихе. Эту книгу мы цитировать не будем. Нет, не потому, что ее русское издание готовилось Институтом Актуариев г. Кемерово – тут лишь можно поинтересоваться, почему такого института нет в г. Казани.

Дело в том, что начиная с 2001 года она растворяется в лучах вдохновленного знаниями и талантом профессора Гербера капитального трактата «Актуарная математика». Мы будем ссылаться на этот трактат как на [Биг-Баг] и воспринимать его авторов как единый образ ученого по прозвищу «Биг-Баг». У математиков есть Бурбаки, а у актуариев будет «Биг-Баг».

Почему именно «Биг-Баг»? Имя возникло совершенно случайно, когда автор этих строк пытался придумать подходящую аббревиатуру, чтобы отразить в ней всех пятерых авторов книги.

Бауэрс–Гербер–Джонс–Несбитт–Хикман. Два первых имени хорошо сокращаются до «Баг», а вот с остальными сложнее. Решение пришло внезапно: авторов много, книга большая – пусть будет «Биг-Баг», ведь, как известно, Big – по-английски «большой». Когда же из глубин памяти возник Максим Каммерер по прозвищу Биг-Баг, то, как пишут в романах, «все встало на свои места». Не то, чтобы пособие сразу же обрело концепцию семиотической безопасности, способную решить обозначенную в предисловии «проблему оберега». Просто возникло устойчивое ощущение, что найден верный тон.

II

Коварная власть суеверия таится в представлении о том, что, будучи уверенным в предустановленности мировой гармонии, человек может испытывать чувство вины за свое существование в этом мире. Как бы чего не испортить, – думает человек, – а тут еще эта беспощадная, провоцирующая семиотика вероятностей смерти. «Ну, кто тянул тебя за язык!» – корит он себя, обнаруживая последствия своих слов в неожиданных и грозных событиях, которые благодаря упомянутой вере в гармонию теперь уже кажутся ему ожидавшими именно этих слов, чтобы сбыться...

Как бы то ни было, если мы встречаем фразу вида «вероятность того, что новорожденный умрет в возрасте между x и z лет...» или вычисляем величину ${}_{t|u}q_x$, где $x+t$ – чей-то нынешний возраст, а таблица смертности составлена t лет назад, то это все-таки обязывает произносить надлежащие слова. А может быть, даже и совершать какие-то ритуалы. Кто-то назовет это тем самым суеверием, составитель же скажет – экология, этика и техника безопасности! Не «новорожденный», а «лицо (0)»! Хоть политкорректностью назови – главное, чтобы «черт с рогами» исчез из лекций и учебных аудиторий!

По каким бы ассоциативным каналам ни передавались волны страха, порожденные дискурсом о смерти, с ними нужно как-то бороться, и этому должна быть посвящена какая-то часть книги. Чтобы правильно, «смеясь, расставаться с прошлым» или «попирать смерть ногами, чтобы та бежала без оглядки», нужно выравнивать экологию текста. И присматривать за этим в настоящем пособии будут, прежде всего, советские следователи. Рука об руку с Юрием Деточкиным идет его друг, капитан милиции Максим Подберезовиков, он всегда рядом, и пока благополучие советских людей в его надежных руках, можно спокойно работать!

Уже был и еще будет Максим Каммерер, будут Шерлок Холмс и доктор Ватсон, встретим мы и Мухомора с его мушкетерами. Патрульно-постовую службу будут нести также капитан венецианских гвардейцев дель Арте и шериф Гек Тейт – ведь за европейцами и американцами тоже нужно присматривать. Если же присутствия этих достойных людей будет мало, то, как предписывает советская интеллигентская традиция, мы будем обращаться напрямую к Воланду.

Да, мы забыли сказать, что Атос – это Атос-Сидоров, непосредственный начальник Биг-Бага...

III

Следует отметить, что идея привлечь к решению проблем страхования лучшие полицейские силы отнюдь не нова – она восходит, по меньшей мере, к временам С.Е. Савича. Именно последнему было Высочайше поручено представить на Втором конгрессе актуариев в Лондоне доклад управляющего Страховым отделом Министерства внутренних дел Российской Империи М.А. Остроградского «О законодательстве по страхованию жизни в России». Основной тезис доклада: «Уставы русских страховых обществ должны быть утверждены Министром внутренних дел»[3].

Поучительно остановиться на этом документе подробнее. Сделаем несколько выписок из Дополнения 6 в последнем издании книги С.Е. Савича [Сав] (с. 447 – 450).

«Общества страхования жизни в России действуют на акционерных началах. Вследствие этого их уставы подлежат Высочайшему утверждению, по одобрении их Комитетом министров... Общие полисные условия подлежат утверждению министра внутренних дел».

[3] См. [Сав], Дополнение 4, с. 434 – 435. Что же касается Высочайшего поручения, то составитель уверен, что именно так все и было.

«Страховые общества подчинены надзору Министерства внутренних дел. Правила этого надзора, установленные Положением 6 июня 1894 г., сводятся к следующему.

При Министерстве внутренних дел учрежден Комитет из четырех членов (два от министерства внутренних дел и два от Министерства финансов) под председательством директора хозяйственного департамента Министерства внутренних дел... Делами Комитета управляет отдельная канцелярия, именуемая Страховым отделом... Постановления вступают в силу по утверждении министром внутренних дел, который по некоторым важнейшим вопросам входит в соглашение с министром финансов... На Страховой комитет возложен надзор над страховыми обществами в отношении соблюдения ими законов и уставов, а равно и в отношении целости их капиталов: он пользуется правом ревизии обществ...».

«...Комитет постановляет о выборе таблиц смертности, размере технического процента и о формулах, служащих для исчисления резерва премий по страхованию жизни и устанавливает формы финансовых отчетов и статистических ведомостей страховых обществ...».

«Частное страховое право в России находится, так сказать, в периоде своего образования. Законодательства почти что не существует в этой области...».

Таким образом, наши первоначальные установки приобретают прочный исторический фундамент. В условиях, когда мы только начинаем открывать для себя масштабы исторических помыслов императорского периода российской истории, необычайно важным оказывается установление прямых связей с историческими предшественниками.

Современные российские актуарии должны сделать все возможное, чтобы указанные помыслы не пропали втуне, не стерлись волнами времени, как стерлись из исторической памяти послереволюционные годы жизни С.Е. Савича. Судя по сведениям из [Сав], которые язык не повернется назвать биографическими, о последнем периоде жизни Савича – с 1927 года до его смерти предположительно (!) в 1936 году – не известно вообще ничего.

Ничего не известно об ученом, которому столь многим обязано мировое актуарное сообщество! Благодаря которому оно столь многим обязано России! Одно имя которого почти целый век поддерживало историческое достоинство российской актуарной науки!

И который до сих пор помогает нам постигать не только организацию страхового дела, его принципы и его математику, но и его философию и психологию, если угодно, даже «метаисторию» – словом, то скрытое, что превращает страхование из узкоспециальной области экономики в важную сферу экологии человеческого духа.

IV

Считается, что всякое развитие несет на себе следы своих «родовых травм», «благословений и проклятий», а также «первородных грехов». Суеверие это или «повторение филогенеза в онтогенезе» – уже не суть важно. Главное, что в той истории, которую открыл для нас С.Е. Савич, имеется изрядное число «белых пятен» для заполнения – и не только фактами, но и элементами детектива, в чем-то даже авантюрного. Чему и попытается себя посвятить настоящее пособие. Правда, уже ближе к своей финальной части.

Романтизация – это экологически чистая дань прошлому, тонко балансирующая между пафосом и комизмом. К тому же она хорошо «строит» суеверия, нанизывая их на интриги, не позволяющие им соскакивать обратно в реальную жизнь. Романтизм приходит из книг как мир людей действия, которые пытаются активно бороться с фатальностью этого мира.

Когда авгуры запретили Цезарю вступать в битву с врагом из-за плохого аппетита священных кур, великому полководцу пришлось тайно подбросить десяток нарубленных гусениц в священную кормушку. Куры «вылупили глаза и, сладострастно кудахтая, накинулись на корм, – так мне было разрешено выиграть Кельнскую битву», – саркастически сетует Цезарь, и заключает:

«Но главное, вера в знамения отнимает у людей духовную энергию»[4]. Романтизация и возникает-то как средство восстанавливать эту энергию, как своего рода «лекарство против страха». Разумеется, брать пример с Цезаря недальновидно (вспомним Брута или историю с Львом Абалкиным). Да и выиграть Кельнскую битву не всякому дано. Но уж что-что, а нарубить с десяток гусениц в священную кормушку! Это уж, как говорится, сам Бог велел!..

Есть такой специальный термин – «технический риск страховщика». В тарабарской традиции «научного языка девяностых» его удобно

[4] *Торнтон Уайлдер.* Мартовские иды. Цит. по [МИД], № 7, с. 121.

определить как риск, связанный с осуществлением страхования. Точно так же мы можем определить технический риск составителя учебного пособия. Романтизация выступает, в частности, как форма страхования такого риска.

Вот, например, если посмотреть на выходные данные книги [Биг-Баг] в списке литературы, то там обнаруживаются совсем не те авторы, которые упоминались выше. Такая маскировка нужна, пока библиотечный экземпляр находится у составителя. Романтический выбор псевдонимов для Гербера и компании должен заставить читателя задуматься. Да и сама наша далекая от жизни (извините за каламбур!) тема оживает: «а вдруг этот выбор неспроста?»

Завершая тему выбора верного тона, начатую несколькими страницами выше, следует сделать самый главный вывод. Участие в нашем пособии Биг-Бага – Максима Каммерера свидетельствует о том, что у нас есть будущее перед лицом неумолимости актуарной математики, которую мы здесь изучаем. Стругацким доверять можно, и значит, можно надеяться, что пара веков в запасе у нас все-таки есть.

V

Вспомним на мгновение, что страховое дело – это, прежде всего, экономика. А у экономистов было не принято слишком уж раскрывать свои источники, особенно западные – зачем собственными руками «кормить» конкурентов? Этой мудрой традицией также можно мотивировать новую кодировку авторского коллектива [Биг-Баг].

Разумеется, здесь мы отдаем дань комизму нашей ситуации. Теперь обратимся к ее пафосу.

В прошлом году на лекции по спецкурсу, связанному с теорией инвестиций, одна любознательная студентка спросила составителя: «Зачем Вы занимаетесь этими вещами, если никак не применяете их в реальной жизни?» Все равно, как если бы сам спецкурс воззвал ко мне суровым голосом: «Что в имени тебе моем?»

«Ненависть!» – ответил я тогда. – «Чем не применение в реальной жизни?» И в самом деле, как иначе относиться к людям, которые не просто считали всех остальных профессионально неполноценными – даже самое слово «профессионально» куда-то исчезало... И то – хочется назвать его закономерным – обстоятельство, что они, в конце концов, оказались низвергнутыми с придуманного ими самими для себя Олимпа, мало утешает. Экономисты словно открыли «ящик Пандоры» – и пришедшие им на смену юристы идут, кажется, той же дорогой...

Просится продолжение: «Как это, кстати, и случилось с Массачусетской машиной, когда на глазах у ошеломленных исследователей зародилась и стала набирать силу новая, нечеловеческая цивилизация Земли»[5].

Ненависть деструктивна и снабжает «астрал» материалом для новых страхов и суеверий. Тем не менее, представляется, что подвергать экономистов «принудительной романтизации» не нужно. Как и юристов. Может быть, все-таки, само «рассосется»?

VI

В заключительной части введения следует, наконец, посмотреть на актуарную математику, так сказать, во имя ее самой. Нам следует отразить здесь (вразбивку): общую характеристику пособия, принципы его построения, динамику, а также некоторые методические достижения и пару вопросов, оставленных «за кадром».

Настоящая книга задумывалась как пособие «нулевого поколения», т.е. как (очередная) первая встреча составителя с представляемым здесь материалом. Поскольку данное введение завершает работу над книгой (там, вдали, остался только эпилог), можно отчитаться в том, что ее основная часть писалась не фрагментами, а практически набело, не возвращаясь к уже написанному. Здесь есть свои плюсы и свои минусы, которые мы обсуждать не будем.

Как уже отмечалось выше, пособие представляет собой проработку соответствующих разделов книги [Биг-Баг]. «Основной черновик» формировался в 2013 и 2014 гг. при чтении лекций для студентов нескольких групп ИВМиИТ и даже одной группы ИУТР[6]. Биг-Баговская «калька» позволила практически безболезненно протягивать линию изложения от темы к теме.

Первые разделы пособия написаны немного по-школярски – составитель пытался преодолеть гнетущее чувство «двойного стандарта», вызываемое так и оставшимся не проясненным в [Биг-Баг] вопросом об условной природе и безусловной записи вероятностей ${}_tp_x$ и ${}_tq_x$, что на

[5] См. [*АБС*], с. 390.

[6] Правда, после этого ИУТР почему-то переименовали...

первых порах отражалось в названиях разделов. Под натиском условной модели «двойной стандарт» отступал, правда, довольно медленно, так как составитель еще не исключал возможности использования «формально-косметической» модели пособия.

«Решающим сражением на поле стимулов» стало проведенное в разделе 10 доказательство соотношения $\lim_{x\to\infty} xs(x)=0$ с помощью правила двух милиционеров. Стало ясно, что пособие состоялось и «косметическим ремонтом» установок из [Биг-Баг] уже не обойтись. Последовавший за этим сражением «парад условных математических ожиданий» окончательно закрепил победу условного подхода. При этом роль катарсиса сыграло драматическое переписывание из [Биг-Баг] таблицы смертности, и на первый план вышла проблема выбора для пособия новой «парадигмы», а проще говоря – новых стимулирующих искушений для его составителя.

Эмоциональное восприятие таблицы смертности, напутствуемое «проблемой оберега», сыграло роль бабочки, заставившей орла свернуть с дороги[7]. Грандиозность и в то же время конечность таблицы смертности, ее вынужденная детерминированность, определяемая самой необходимостью ее применять, знаменуют примат ремесла над высокой наукой, *страхового дела* над страхованием. Дискретность словно с разгону врезается в непрерывную модель, которая отвечает на этот вызов интерполяцией и конечными разностями. При этом таинства вероятности начинают таять, открывая неискушенному взору замаскированные до самого последнего момента «боевые порядки» математического анализа. (Вероятности еще предстоит пережить последний ренессанс, но уже в самом конце пособия...)

Произошедший слом сюжета, его линейной поступательности подводит нас к пониманию того, что изучаемая актуарная математика представляет собой «хорошо проадаптированный матан» и принадлежит предшествующей, индустриальной эпохе – «цивилизации моторов», к которой нынешняя эпоха – «цивилизация стволовых клеток» – уже не хочет относиться слишком серьезно. Чтобы заставить читать себя в

[7] Притчей о бабочке и орле Роберт Шуман в образной форме представил пересечение творческих путей Джоакино Россини и Людвига ван Бетховена. «Цит.» по т/ф «Жизнь Бетховена» (Б. Галантер, Б. Добродеев, П. Кадочников, 1978).

постиндустриальную эпоху, «индустриальные тексты» должны уметь по ней правильно «рассеиваться» (см. [Фуко], с. 13).

Составитель предложил свой вариант такого «рассеяния», на мгновение став автором, а затем сразу же растворившись в карнавале, устроенном им в разделах 22, 23 и 24. Заинтересовавшийся читатель может уже сейчас отправляться туда. Мы же должны выполнить почетную миссию и объявить, что раздел 22 посвящается основателю кафедры математической статистики Казанского университета и ее первому заведующему, профессору И.Н. Володину.

Лет пятнадцать назад милейший Игорь Николаевич, подобно Адаму называющему, дал составителю прозвище «Труффальдино из Бергамо» – за то, что тот, ничтоже сумняшеся, пытался развивать сразу два научных направления[8]. Теперь вот составитель созрел вернуть старый долг – пособие по актуарной математике, давно обещанное своему заведующему...

Итак, мы попытались кратко охарактеризовать настоящее пособие и столь же кратко обрисовать его динамику. Чтобы не перегружать данный подраздел, все остальное перенесем в следующий.

VII

Вначале очень осторожно коснемся принципов построения пособия, которые на деле всегда оказываются принципами умолчания.

Первая проблема, с которой сталкивается любое пособие – это проблема напоминания основ. Они должны присутствовать, часто молчаливо подразумеваться, но не отвлекать и тем более не довлеть. В нашем случае основы – это, выражаясь романтически, основы теории вероятностей в зеркале теории меры.

Вот хороший принцип для работы с основами: «воистину, есть ложь, беспардонная ложь и статистика, но не будем, друзья, забывать и о психологии!»[9] Нет, речь не о том, что составитель никогда не был специалистом по теории вероятностей – в конце концов, четвертьвековая работа на кафедре статистики не могла пройти бесследно. Дело в том, что в настоящем пособии теоретико-вероятностные основы присутствуют на правах констатаций, давно сложившихся ритуальных формул, ко-

[8] «Чтобы получать двойную порцию», – срезал бы меткий Ярослав Гашек, но в жизни все было гораздо драматичнее...

[9] См. [*АБС*], с. 277.

торые положено знать, разнообразных фактов, которые настолько на слуху, что доказывать их просто неприлично. А это уже «психология»! Да и вообще, большинство исходных положений уже давно можно воспринимать как аксиомы, хотя «за их плечами» – порою далеко не быстрый и драматичный генезис.

Функции распределения и плотности, интегралы Римана и Лебега, именные распределения, непрерывность и дифференцируемость – «вот далеко не полный перечень» знаний, которые давно уже составляют некий разговорный язык. А какой чудак будет доказывать язык? Да еще разговорный? Это все давно уже арифметика...

Разумеется, следует помнить, что при переходе от основ к основной части пособия упрощение становится лишь одним из инструментов, призванных удерживать читателя «в своем темпе восприятия». Другим таким инструментом может служить правильный выбор жанра. Иногда бывает полезным представить пособие как студенческий конспект, но здесь надо умело, даже удачливо «играть на разнице» между цинизмом и идеализмом.

Нашему же пособию просто «на роду написано» нести бремя детектива. К этому обязывает, прежде всего, избранное нами выше покровительство КОМКОНа. Кроме того, уже отмечавшееся отсутствие разграничения предметов ведения и полномочий между условной и безусловной моделями в [Биг-Баг], скорее всего, так и останется «детективом навсегда». Наконец, еще профессор И.Н. Володин в свое время квалифицировал содержание двухтомника [Фе-I, II] как детектив, а для составителя этот «Зеленый Феллер» давно уже стал эталоном дидактики.

Посмотрим же, какие упражнения считал для себя важным решить в настоящем пособии составитель.

1. Продвижение условного подхода. Проверена истинность условных версий ряда ключевых формул, имеющих безусловные прототипы в [Биг-Баг].

2. Мы не старались записывать все возможные выражения для той или иной величины. Но мы старались открыть все возможности для такой записи.

3. Связи и аналогии между характеристиками случайных величин X и $T(x)$ привели к «матрице» актуарного контекста, порождаемой «столбцом» характеристик $\mathcal{A}_X(x) = [F_X(x), f_X(x), s_X(x), \mu_X(x)]$. Преобразования столбцов друг в друга являются носителями вычислений ак-

туарных величин. С этой темой у пособия появились свои «схоластика» и «казуистика».

4. Сопоставление наборов $\mathcal{A}_X(x)$ (характеристики для лица (0)) и $\mathcal{A}_{T(x)}(t \mid X > x)$ (характеристики для лица (x)) послужило источником обоснования того факта, что для каждого возраста x функция $\mu(x)$ дает значение в точке x условной функции плотности случайной величины X при условии дожития до возраста x (в [Биг-Баг] приведена только формулировка, да и то «попутно»).

5. Математический анализ выведен из того подчиненного, подчас «бессловесного» состояния, которое он занимал в [Биг-Баг], и возвращен к своей ключевой компетенции «арбитра доказательств». Выше уже отмечалась роль соотношения

$$0 \le xs(x) = x\int_x^\infty (-s'(t))dt \le -\int_x^\infty ts'(t)dt \to 0,\ x \to \infty,$$

в драматургии пособия. Так вот, с этого соотношения актуарная математика страхования жизни начинается как *математический* курс.

Из-под спуда страховых интерпретаций высвобождены свойства несобственных интегралов, а также пределов и производных. Несобственное интегрирование по частям послужило «строительными лесами» книги, образовав сквозной сюжет, призванный закрепить определенные операции по отношению к макрохарактеристикам времени жизни и дожития.

Уровень сложности аналитических конструкций, применяемых в пособии, демонстрирует теорема Фихтенгольца[10] о дифференцировании несобственного интеграла по параметру в применении к ожидаемому времени дожития. Уровень аналитики другой природы показывает исследование выпуклости функции l_{x+t}, $0 \le t \le 1$.

6. Прояснение связей между аналитическими и вероятностными структурами. Вычисление величины $\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|} = E[\overline{T}(x) \mid X > x]$, где $\overline{T}(x)$ определяется соотношением (11.1). Переход от оператора математиче-

[10] Правильнее сказать – теорема из [Фихт-II], но вот как раз здесь мы предпочитаем скрыться под маской студента, который может себе позволить роскошь, не проверяя, приписать теорему из учебника его автору. Так мы воздаем должное любимому преподавателю, которого никогда не видели...

ского ожидания к интегралу: вычисление функций распределения $F_{T(x)I}(t|X>x)$ и плотности $f_{T(x)I}(t|X>x)$, где $I=I_{\{0<T(x)\le n\}}$.

Расшифровка данного в [Биг-Баг] истолкования интеграла (14.1), определяющего ${}_nL_x$: подведение под это истолкование прочного теоретико-вероятностного фундамента – представления ${}_nL_x$ в виде математического ожидания, как условного, так и безусловного. Переход от интеграла к математическому ожиданию: вычисление функций распределения $F_{T(x)I}(t)$ и плотности $f_{T(x)I}(t)$.

Соотношение $\overset{o}{e}_x = e_x + 1/2$ в предположении равномерного распределения смертей установлено способом, отличным от приведенного в [Биг-Баг].

Оставлен открытым вопрос о связи между равномерностью распределения смертей и равномерностью распределения в классическом смысле.

7. Проверка применимости формулы трапеций к вычислению L_x в таблице смертности.

Остались открытыми вопросы вычисления L_0 и T_0.

8. Обоснование условий, эквивалентных определениям трех знаковых интерполяций (предложения 16.1–16.3).

Следует отметить, что тема интерполяции придает пособию характер универсальности: мы не просто «заклеиваем дыры» в таблице смертности – мы можем это делать разными способами.

9. Для оформления доказательства связи (22.1) между актуарными настоящими стоимостями непрерывного и дискретного полисов бессрочного страхования на случай смерти предложен нетривиальный ход – погружение в драматургию литературного произведения. Идея такого погружения заимствована у Жана-Франсуа Лиотара и Фредрика Джеймсона в переложении И.П. Ильина[11], но в качестве «книги шифров» использована работа Умберто Эко «Поиски совершенного языка в европейской культуре» [Эко].

Если предпринятая в разделах 22–24 реализация указанной идеи кому-то покажется слишком смелой, то всегда можно считать, что упомянутые разделы посвящены развитию некоторых аспектов мнемотехники, в частности, составлению шпаргалок.

---

[11] См. [Иль], с. 4, 217.

И вообще, постмодернизм – это не каприз, а вынужденная необходимость уживаться с реальностью, которую никогда до конца не поймешь.

10. Увенчать пособие – почетное право теории вероятностей. Это и справедливо, и добродетельно, как говорил в таких случаях Атос. С помощью техники условных математических ожиданий получено рекуррентное соотношение, организующее альтернативный способ доказательства соотношения (22.1), и выведено дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет актуарная настоящая стоимость $\bar{A}_x$ бессрочного страхования на случай смерти.

В заключение нашего списка «методических достижений» следует отметить, что в изучение таблиц смертности мы не углублялись, считая эту тему находящейся «под юрисдикцией» статистики. Миссию пособия мы видели в постановке актуарной математики «на рельсы» математического анализа, придании ей атрибутов университетского стандарта, прежде всего – математического доказательства в его современном понимании.

Очевидно, все только что изложенное – это отчет по «изобретению велосипедов», давно известных на Западе. Однако печальный опыт некоторых моих знакомых, совершивших рывок от «местного образования» 1970-х гг. к передовым гуманитарным концепциям Запада – как потом выяснилось, передовым в 20-40-е гг. XX в. – обязывает составителя вбирать в свою миссию память о подобных «изобретениях».

VIII

> Шпион должен обладать двумя неотъемлемыми качествами: холодной строгой рассудочностью, я бы сказал, математической рассудочностью, и высокой, необычайно развитой, изощренно развитой эмоциональностью...
>
> *Майор Пронин*[12]

Остановимся на творческих компетенциях. Зачем тратить время, силы и энергию на изучение актуарных ценностей прошлых эпох, ценностей, пусть и почтенных, но, тем не менее, довольно экзотических? Ну, хотят гробовщики, могильщики, агенты ритуальных услуг видеть над собой интеллигентскую прослойку, изучающую *математику смер-*

[12] *Лев Овалов.* Медная пуговица. Цит. по [ЛОВ], с. 80.

ти, – ну, пусть у них тоже будут свои «белые воротнички». Зачем преподавать это в университетах, да еще на нескольких специальностях, пусть даже частично экономических? Ведь, скажем, криминальная статистика уж, наверное, порождает *свою* математику смерти – мы же ее не преподаем! Мы и слышали-то о ней только благодаря случайным обмолвкам в романах А. Марининой.

Конечно, можно считать, что демография изучает «естественный ландшафт смертности», а криминалистика – его, так сказать, рукотворную часть... Но мы хотели бы поговорить о другом. Давайте еще раз послушаем рассказ угольщика Филиппа из бессмертной гриновской феерии:

> «...Вот, к примеру, раз завелось дело о ее ремесле. "Я тебе что скажу, – говорит она и держится за мое плечо, как муха за колокольню, – моя работа не скучная, только все хочется придумать особенное. Я, говорит, так хочу изловчиться, чтобы у меня на доске сама плавала лодка, а гребцы гребли бы по-настоящему; потом они пристают к берегу, отдают причал и честь честью, точно живые, сядут на берегу закусывать". Я это захохотал, мне, стало быть, смешно стало. Я говорю: "Ну, Ассоль, это ведь такое твое дело, и мысли поэтому у тебя такие, а вокруг посмотри: все в работе, как в драке". – "Нет, – говорит она, – я знаю, что знаю. Когда рыбак ловит рыбу, он думает, что поймает *большую* рыбу, какой никто не ловил". – "Ну, а я?" – "А ты? – смеется она, – ты, верно, когда наваливаешь углем корзину, то думаешь, что она зацветет"...»[13].

В этом *кредо Ассоль* и раскрывается то, что хочется назвать творческими компетенциями, или даже «метакомпетенциями». Умение создавать модель своей профессии, состоящую из чистого вдохновения и потому позволяющую творить «без оглядки». Это все равно, что увидеть, как человек будет играть в свою нынешнюю профессию, вновь очутившись в детском саду или в первом классе...

Благодаря Ассоль мы знаем, как выглядит вдохновение моделиста-конструктора или рабочего-угольщика. В книге, которую Вы держите в руках, уважаемый читатель, предпринята попытка понять, что представляет собой вдохновение актуария...

А теперь, «в едином порыве» суеверий и jūris prūdentia представим наш главный «оберег»:

Все события и персонажи пособия являются вымышленными. Любое совпадение с реально живущими или когда-то жившими людьми случайно.

[13] *Александр Грин.* Алые паруса. Цит. по [Гри], с. 364 – 365.

Глава I. Характеристики времени жизни

Если глава II посвящена поиску путей выхода из «эсхатологического кризиса», порожденного изучением таблицы смертности, а глава III вовсю разрабатывает выход за грань актуарного дискурса, то первая глава еще только ступает на тропу, ведущую к указанным сюрпризам.

Начинаясь как осторожный студенческий конспект, она постепенно набирает обороты и превращается в стандартный учебник по актуарной математике, каким он должен был бы выглядеть лет тридцать-сорок назад, стоя на книжной полке между своими собратьями по прикладному анализу. Современность уже не дает возможности подстраивать к нашему пособию такие генеалогии, и со следующей главы учебник начнет рассыпаться, превращаясь во что-то иное. Однако, пока этого еще не произошло, попробуем представить себя в уютной советской «серединности» и произнесем несколько ритуальных слов, которые не успели прозвучать во введении.

Настоящее пособие предназначено для студентов старших курсов – как специалистов, так и бакалавров с магистрами. Можно было бы даже предложить его аспирантам – для пресловутого общего развития, коллегам же – для коллекций, кунсткамер и паноптикумов...

Пособие снабжено значительным числом примеров и упражнений, иллюстрирующих и проясняющих изучаемые темы, теоретические положения, доказательства теорем и новые понятия. В качестве примеров решаются задачи из [Биг-Баг], а упражнения возникают, как правило, при доказательстве теорем.

В настоящем семестре (осень 2014 г.) подготовленный в пособии материал читается в рамках спецкурсов «Страховые и актуарные расчеты» для специальности «Математические методы в экономике» и «Страховая математика» для специальности «Прикладная математика и информатика» (магистры).

Предшественниками данной книги по «учебно-методической династии» составитель считает пособия [Се-1], [Се-2], [Ми-1], [Ми-2], создающие основу для преподавания математики и экономики с единых позиций и задающие соответствующий ментальный строй. Составитель глубоко благодарен авторам указанных пособий за возможность поработать на руководимых ими семинарах 1990-2000-х гг. по страхованию, финансовой математике и основам менеджмента.

1. Исходные данные

(x) – лицо возраста x, оно же «лицо (x)»; $x \geq 0$.

X – возраст в момент смерти для лица (0) (т.е. для новорожденного, как пишут в книгах). X есть случайная величина (сл.в.) непрерывного типа. На теоретико-вероятностном языке это означает, что существует плотность вероятностного распределения сл. в. X.

$T(x)$ – продолжительность предстоящей жизни, оно же время дожития, оно же остаточное время жизни лица (x); $T(x) = X - x$.

$F_X(x) = P(X \leq x)$ – функция распределения сл. в. X.

Замечание.

В отечественной традиции принята запись $P(X < x)$.

В зарубежной традиции – запись $P(X \leq x)$, которой мы здесь будем придерживаться.

Продолжим.

$s(x) = 1 - F_X(x) = P(X > x)$ – вероятность лицу (0) дожить до возраста x. Название: $s(x)$ – функция дожития = функция выживания.

Предположение: $F_X(0) = 0$. Отсюда следует равенство $s(0) = 1$, т.е. $P(X > 0) = 1$.

Подразумеваемое предположение: $s(x) = P(X > x) > 0$ при всех тех значениях $x \geq 0$, при которых потребуется производить деление на $P(X > x)$.

Далее вводятся главные величины "of the life insurance calculus":

${}_t\boldsymbol{q}_x$ – вероятность того, что (x) умрет в течение ближайших t лет,

${}_t\boldsymbol{p}_x$ – вероятность того, что (x) достигнет возраста $x + t$.

Эти величины связаны очевидным соотношением

${}_t p_x + {}_t q_x = 1.$

Для их определения и вычисления используются две модели.

Безусловная модель

$${}_t q_x = P(T(x) \le t)$$
$${}_t p_x = P(T(x) > t)$$

Условная модель

$${}_t q_x = P(T(x) \le t \mid X > x)$$
$${}_t p_x = P(T(x) > t \mid X > x)$$

Сравнение моделей.

В безусловной:

$${}_t q_x = P(X \le x + t)$$

$${}_t p_x = P(X > x + t)$$

В условной:

$${}_t q_x = P(X \le x + t \mid X > x) = \frac{P(X \le x + t \text{ и } X > x)}{P(X > x)} = \frac{P(x < X \le x + t)}{P(X > x)}$$

$${}_t p_x = P(X > x + t \mid X > x) = \frac{P(X > x + t \text{ и } X > x)}{P(X > x)} = \frac{P(X > x + t)}{P(X > x)}$$

Важное замечание.

Приравнивание выражений для ${}_t p_x$ в безусловной и условной моделях немедленно дает равенство $P(X > x) = 1$. Обнаруживаемое в имеющихся источниках одновременное использование обеих моделей никак не комментируется. Соответствующее изложение материала больше напоминает уловки, основанные на умолчаниях.

Так, например, приравнивание выражений для ${}_t q_x$ в обеих моделях дает

$$P(X \le x + t) = \frac{P(x < X \le x + t)}{P(X > x)}.$$

Отсюда сразу не видно, что $P(X > x) = 1$. Поэтому изложение в ряде источников начинается с ${}_t q_x$, а вопрос о ${}_t p_x$ затушевывается.

В конце книги, если успеем, приведем соответствующие цитаты.

В настоящем пособии ***мы придерживаемся условного подхода***, аккуратно напоминая о существовании безусловного.

Продолжаем исходные данные.

Итак,

$$ {}_t p_x = P(T(x) > t \mid X > x), \quad {}_t q_x = P(T(x) \le t \mid X > x). $$

Начальные условия ($t = 0$ или $x = 0$):

$$ {}_0 p_x = P(T(x) > 0 \mid X > x) = P(X > x \mid X > x) = 1, $$

$$ {}_t p_0 = P(T(0) > t \mid X > 0) = P(X > t \mid X > x) = 0 $$

$$ = \frac{P(X > t)}{P(X > 0)} = P(X > t) = s(t). $$

Выражения для ${}_t p_x$:

$$ {}_t p_x = P(X > x + t \mid X > x) = \frac{P(X > x + t)}{P(X > x)} = \frac{s(x+t)}{s(t)} $$

$$ = \frac{P(X > x + t \mid X > 0)}{P(X > x \mid X > 0)} = \frac{P(T(0) > x + t \mid X > 0)}{P(T(0) > x \mid X > 0)} = \frac{{}_{x+t} p_0}{{}_x p_0}. $$

2. Характеристики сл. в. X: $F_X(x)$, $s(x)$, $f_X(x)$ и $\mu(x)$

Функции $F_X(x)$ и $s(x)$ уже введены.

X – сл. в. непрерывного типа. Как принято говорить в таких случаях, «из стандартного курса ТВиМС мы знаем, что у сл. в. X имеется функция плотности»

$$ f_X(x) = F_X'(x) \text{ п.в. на } x \ge 0, $$

но про «п.в.», то есть про «почти всюду» лучше ничего не говорить, считая, что это просто ритуал такой.

Здесь, конечно, напрашивается обсуждение функциональных классов, которым должны принадлежать функции $F_X(x)$ и $f_X(x)$, чтобы выполнялись все необходимые соотношения, но вместо этого предлагается следующее.

Соглашение им. А.П. Нордена. Все функции, рассматриваемые в настоящем пособии, считаются дифференцируемыми столько раз, сколько нам требуется[14].

В порыве откровенности можно сказать, что описываемые здесь постановки должны охватывать конечное число убедительных частных случаев, где все дифференцируемо, сколько надо. А развиваемый на этих страницах спецкурс должен представлять собой теоретическое обобщение указанных частных случаев.

Остается добавить только (по секрету), что приведенный «пассаж» представляет собой уловку, целью которой является умолчать о том, что функцию $F_X(x)$ мы будем воспринимать как дифференцируемую. Ну, не принято функцию распределения считать таковой, и все тут! А нам для простоты и удобства надо! Вот и выкручивайся...

Излишне напоминать в свете **Важного замечания** выше, что всю ответственность за подобную легкомысленность несут упомянутые в нем источники.

Продолжим и введем величину $\mu(x)$.

Вначале запишем соотношение

$$P(x < X \le z) = F_X(z) - F_X(x) = s(x) - s(z), \; x, z \ge 0. \qquad (2.1)$$

Второе равенство в этом соотношении – следствие уже известной связи между функцией распределения и функцией дожития. Остановимся на первом.

И вообще, просто ненадолго остановимся. С самого начала мы разогнались, забыв, что студенты почти все забыли из курса ТВиМС (если вообще учили) либо вообще его не проходили. Надо немного поработать с «азами». Особо «разоряться» не будем, напомним только про вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$; это мы *здесь* напомним, а говорить об этом будем в лекции. Особо осторожно нужно вводить $\mathfrak{A}$, потому что это σ-алгебра, а такие слова обычно пугают... Еще напомним о понятии случайной величины, она же измеримая функция, о математическом ожидании и дисперсии. Реакция слушателей покажет, нужно ли продолжать. Что интересно, задачи они смогут решать и безо всей этой «лабуды». На том и стоим!..

---

[14] Такого правила придерживался в своих лекциях по геометрии легендарный профессор А.П. Норден, именем которого мы это правило и называем.

Теперь аккуратно двинемся вперед, описывая процедуру, которую обозначим как

Строгое обоснование первого равенства (2.1):

Множество, или событие $(X \le x)$, для которого вычисляется мера, или вероятность, $P(X \le x)$, это на самом деле множество

$$A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\}.$$

Другими словами, A есть подмножество всех точек в пространстве элементарных событий Ω, в каждой из которых функция $X(\omega)$ не превосходит значения x. Аналогично введем множество

$$B = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le z\}.$$

Тогда

$$\{\omega \in \Omega : x < X(\omega) \le z\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le z, X(\omega) > x\} =$$
$$= \{\omega \in \Omega : \omega \in B, \omega \notin A\} = B \setminus A,$$

и поэтому

$$P(x < X \le z) = P\{\omega \in \Omega : x < X(\omega) \le z\} = P(B \setminus A) =$$
$$= P(B) - P(A) = P(X \le z) - P(X \le x) = F_X(z) - F_X(x),$$

что и требовалось.

Теперь из первого равенства (2.1) заключаем, что

$$P(x < X \le z \mid X > x) = \frac{P(x < X \le z)}{P(X > x)} = \frac{F_X(z) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} = \frac{s(x) - s(z)}{s(x)}.$$

Это дает возможность записать

$$P(x < X \le x + \Delta x \mid X > x) = \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} =$$

$$= \frac{F'_X(x)\Delta x + o(\Delta x)}{1 - F_X(x)} = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)} \Delta x + o(\Delta x), \ \Delta x \to 0; \qquad (2.2)$$

здесь мы воспользовались стандартным условием дифференцируемости функции $F_X(x)$, известным из I семестра.

Именно последнее равенство и позволит нам ввести функцию $\mu(x)$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X \le x + \Delta x \mid X > x)}{\Delta x} = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)} =: \mu(x). \qquad (2.3)$$

Функция $\mu(x)$ называется *интенсивностью смертности* (силой смертности, the force of mortality). Почему-то вспоминается название «убойная сила», откуда это?

3. Связь между характеристиками сл. в. X

Данная связь сведена в следующую таблицу:

Таблица 1

	Функция распределения $F_X(x)$	Функция дожития $s(x)$	Функция плотности $f_X(x)$	Интенсивность смертности $\mu(x)$
$F_X(x)$	$F_X(x)$ (1,1)	$1 - F_X(x)$ (1,2)	$F'_X(x)$ (1,3)	$\dfrac{F'_X(x)}{1 - F_X(x)}$ (1,4)
$s(x)$	$1 - s(x)$ (2,1)	$s(x)$ (2,2)	$-s'(x)$ (2,3)	$-\dfrac{s'(x)}{s(x)}$ (2,4)
$f_X(x)$	$\int\limits_0^x f_X(u)du$ (3,1)	$\int\limits_x^\infty f_X(u)du$ (3,2)	$f_X(x)$ (3,3)	$\dfrac{f_X(x)}{\int_x^\infty f_X(u)du}$ (3,4)
$\mu(x)$	$1 - e^{-\int_0^x \mu(\sigma)d\sigma}$ (4,1)	$e^{-\int_0^x \mu(\sigma)d\sigma}$ (4,2)	$\mu(x)e^{-\int_0^x \mu(\sigma)d\sigma}$ (4,3)	$\mu(x)$ (4,4)

В верхней строке стоят определяемые функции, в левом столбце – определяющие.

Доказательство соотношений из таблицы.

Приведенную таблицу удобно интерпретировать как матрицу: в каждой клеточке стоит своя пометка (i, j) с номерами строки и столбца, на пересечении которых эта клеточка находится.

В данном контексте заполнение главной диагонали тривиально, а первая строка следует из определений выше. По второй строке: соотношение (2,1) следует из (1,2) и лежит в основе формул (2,3)

$$f_X(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F_X(x+\Delta x)-F_X(x)}{\Delta x}\overset{(2,1)}{=}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{s(x+\Delta x)-s(x)}{\Delta x}=-s'(x)$$

и (2,4)

$$\mu(x)=\frac{f_X(x)}{1-F_X(x)}\underset{\substack{(1,2)\\ \textit{или}\\ (2,1)}}{\overset{(2,3)}{=}}\frac{-s'(x)}{s(x)}.$$

Третья строка: формула (3,1) выражает стандартную связь между распределением и плотностью, на другом языке она получается из свойств интеграла как функции верхнего предела интегрирования:

$$F_X'(x)=f_X(x)\Rightarrow F_X(x)=\int_0^x f_X(u)du.$$

Формула (3,2) следует из (1,2), (3,1), $F_X(\infty)=1$ и свойств интеграла:

$$s(x)=1-F_X(x)=\int_0^\infty f_X(u)du-\int_0^x f_X(u)du=\int_x^\infty f_X(u)du,$$

формула (3,4) – из (1,2) и (3,2):

$$\mu(x)=\frac{f_X(x)}{1-F_X(x)}=\frac{f_X(x)}{s(x)}=\frac{f_X(x)}{\int_x^\infty f_X(u)du}.$$

Четвертая строка: начнем с (4,2). Из представления в (2,4), продолженного до $\mu(x)=-s'(x)/s(x)=-[\ln s(x)]'$, интегрированием получаем $\int_0^x \mu(\sigma)d\sigma=-\ln s(x)+\ln s(0)=-\ln s(x)$ в силу $s(0)=1$. Отсюда

$$s(x)=e^{-\int_0^x \mu(\sigma)d\sigma}.$$

А уж из (4,2) теперь следует все оставшееся. Формула (4,1):

$$F_X(x)\overset{(2,1)}{=}1-s(x)\overset{(4,2)}{=}1-e^{-\int_0^x \mu(\sigma)d\sigma},$$

формула (4,3):

$$f_X(x)\overset{(2,3)}{=}-s'(x)\overset{(4,2)}{=}-\left(e^{-\int_0^x \mu(\sigma)d\sigma}\right)'=\mu(x)e^{-\int_0^x \mu(\sigma)d\sigma}.$$

Доказательство соотношений из таблицы завершено.

4. Связь вероятности ${}_t p_x$ с характеристиками сл. в. X

Речь идет о характеристиках из таблицы 1 – функциях $F_X(x)$, $s(x)$, $f_X(x)$ и $\mu(x)$. Указанную в заглавии связь можно устанавливать разными способами, впрочем, эквивалентными благодаря взаимосвязям в самой таблице 1. На конкретные клетки (i, j) таблицы не ссылаемся, оставляя проработку деталей читателю.

В качестве основы воспользуемся представлением из раздела 1:

$$ {}_t p_x = \frac{s(x+t)}{s(x)}. \tag{4.1} $$

С одной стороны, продолжая равенство (4.1) с помощью связи $s(x)$ и $F_X(x)$, получим

$$ {}_t p_x = \frac{1-F_X(x+t)}{1-F_X(x)}. $$

При $x=0$:

$$ {}_t p_0 = \frac{1-F_X(t)}{1-F_X(0)} = 1-F_X(t) = s(t). $$

Эти формулы довольно часто требуются с x вместо t, поэтому перепишем их еще раз:

${}_x p_0 = 1-F_X(x) = s(x)$.

С другой стороны, с использованием связи $s(x)$ и $\mu(x)$ равенство (4.1) продолжается до цепочки

$$ {}_t p_x = \exp\left[-\int_0^{x+t} \mu(\sigma)d\sigma - \int_0^x \mu(\sigma)d\sigma\right] = e^{-\int_x^{x+t} \mu(\sigma)d\sigma} = e^{-\int_0^t \mu(x+\tau)d\tau} $$

(в конце использована замена $\sigma - x = \tau$). Как и выше, подставляя сюда $x=0$ и заменяя t на x, получим

$$ {}_x p_0 = e^{-\int_0^x \mu(\sigma)d\sigma} = s(x) \tag{4.2} $$

– еще один вывод равенства ${}_x p_0 = s(x)$ из раздела 1.

Мы выразили ${}_t p_x$ через $s(x)$, $F_X(x)$ и $\mu(x)$. Завершим этот ряд выражений, пожалуй, самым бесполезным из них – в терминах $f_X(x)$ – также на основе (4.1):

$$ {}_t p_x = \frac{\int_{x+t}^{\infty} f_X(u)du}{\int_{x}^{\infty} f_X(u)du}. $$

Еще раз отметим, что, пользуясь соотношениями из таблицы 1, мы можем различными способами получать одни и те же формулы. Приведем пример, попутно выражая табличные характеристики посредством величины ${}_t p_x$.

Итак, с помощью связи $F_X(x)$ и $\mu(x)$ устанавливается такое соотношение между $F_X(x)$ и ${}_x p_0$:

$$ F_X(x) = 1 - e^{-\int_0^x \mu(\sigma)d\sigma} = 1 - {}_x p_0. \tag{4.3} $$

Выше оно действительно было. Но вот чего не было: дифференцируя последнее равенство в (4.3), имеем

$$ \mu(x) e^{-\int_0^x \mu(\sigma)d\sigma} \equiv \mu(x) \cdot {}_x p_0 = -\frac{d}{dx}\, {}_x p_0. \tag{4.4} $$

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение для функции дожития ${}_x p_0$:

$$ \frac{d}{dx}\, {}_x p_0 = -\mu(x) \cdot {}_x p_0. $$

Однако более естественным способом его получения представляется логарифмическое дифференцирование первого равенства (4.2):

$$ {}_x p_0 = e^{-\int_0^x \mu(\sigma)d\sigma} \Rightarrow \ln {}_x p_0 = -\int_0^x \mu(\sigma)d\sigma \Rightarrow \frac{(d/dx)\, {}_x p_0}{{}_x p_0} = -\mu(x). $$

Дифференцирование же первого равенства (4.3) «вводит в игру» величину $f_X(x)$, определяющуюся в терминах ${}_t p_x$ с помощью (4.4); окончательное выражение приведем в рамках общего итога:

Функции $F_X(x)$, $s(x)$, $f_X(x)$, $\mu(x)$ *в терминах* ${}_t p_x$:

$$F_X(x) = 1 - {}_x p_0,$$

$$s(x) = {}_x p_0,$$

$$f_X(x) = -\frac{d}{dx}\,{}_x p_0 = \mu(x) \cdot {}_x p_0,$$

$$\mu(x) = -\frac{(d/dx)\,{}_x p_0}{{}_x p_0}.$$

Функция ${}_t p_x$ *в терминах* $F_X(x)$, $s(x)$, $f_X(x)$, $\mu(x)$:

$${}_t p_x = \frac{1 - F_X(x+t)}{1 - F_X(x)},$$

$${}_t p_x = \frac{s(x+t)}{s(x)},$$

$${}_t p_x = \frac{\int_{x+t}^{\infty} f_X(u)du}{\int_{x}^{\infty} f_X(u)du},$$

$${}_t p_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu(\sigma)d\sigma} = e^{-\int_0^t \mu(x+\tau)d\tau}.$$

....

5. Свойства функций $F_X(x)$, $s(x)$, $f_X(x)$, $\mu(x)$ и ${}_t p_x$

Вначале – два предельных соотношения:

1) $\lim\limits_{t\to+\infty} {}_t p_x = 0$; 2) несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \mu(\sigma)d\sigma = +\infty$.

Доказательство.

1) Отправляясь от базового соотношения (4.1), будем иметь

$$\lim_{t\to+\infty} {}_t p_x = \lim_{t\to+\infty} \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{1}{s(x)} \lim_{t\to+\infty} s(x+t) = \frac{1}{s(x)} \lim_{x+t\to+\infty} s(x+t) =$$

$$= \frac{1}{s(x)} \lim_{y\to+\infty} s(y) = \frac{1}{s(x)} \lim_{y\to+\infty} [1 - F_X(y)] = \frac{1}{s(x)} [1 - \lim_{y\to+\infty} F_X(y)] = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\lim\limits_{y\to+\infty} F_X(y) = F_X(\infty) = 1$, поскольку F_X – функция распределения.

2) Итак, мы получили, что при $t \to +\infty$ будет ${}_t p_x \to 0$ для любого $x \ge 0$ (для которого $s(x) > 0$). Логарифмируя, получаем $\ln {}_t p_x \to -\infty$, откуда

$$\int_x^{x+t} \mu(\sigma)d\sigma = -\ln {}_t p_x \to +\infty \ (t \to +\infty)$$

согласно выражению ${}_t p_x$ в терминах $\mu(x)$. При $x = 0$ полученный предельный переход влечет за собой соотношение

$$\int_0^{+\infty} \mu(\sigma)d\sigma = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \mu(\sigma)d\sigma = +\infty,$$

которое и содержит все, что нам требуется.

Замечание. Работа с интегралами – как в только что приведенном доказательстве, так и во всех связанных с ними утверждениях выше (да и ниже) – предполагает все-таки римановский контекст, а не (традиционный для ТВиМС) лебеговский. Данное обстоятельство вновь (как и в разделе 1) связано с наличием ряда порождающих примеров, для которых достаточно использовать интеграл Римана.

Теперь приведем еще одну табличку, в которой соберем свойства величин $F_X(x)$, $s(x)$, $f_X(x)$ и $\mu(x)$ – функций одной переменной x.

Таблица 2

$x<0$	$F_X(x):=0$	$s(x):=1$	$f_X(x):=0$	$\mu(x):=0$
$x=0$	$F_X(0)=0$	$s(0)=1$	не определена	не определена
$x>0$	не убывает	не возрастает	$f_X(x)\ge 0$	$\mu(x)\ge 0$
$x=+\infty$	$F_X(\infty)=1$	$s(\infty)=0$	$\int_0^{\infty} f_X(x)dx=1$	$\int_0^{+\infty}\mu(x)dx=+\infty$

Представляется, что таблицы, подобные данной, приводятся в литературе как результат естественного стремления к упорядочению. Тем более в условиях, когда мы не хотим накладывать изначальных ограничений на вводимые объекты до их «введения в бой». Да и экономистов раньше времени пугать не стоит: математический аспект, разумеется, требует достойного обсуждения, но именно поэтому тогда придется заниматься только этим. Вот и торопишься быстрее «развернуть боевые порядки», еще по пути, «на марше», разбрасывая «вешки» вроде соглашения им. А.П. Нордена или таблицы 2, чтобы потом вернуться. Однако последнее, судя по опыту, удается редко...

Впрочем, некоторые источники более оптимистичны и пытаются «дожать» свойства, *вытекающие* из определений, до свойств *характеристических,* то есть эквивалентных определениям. Например, один из таких источников утверждает, что функция выживания $s(x)$ обладает следующими *характеристическими* свойствами:

1. $s(x)$ не возрастает;
2. $s(x)=1$ при $x\le 0$;
3. $s(+\infty)=0$;
4. $s(x)$ непрерывна

(мы позволили себе слегка адаптировать данные условия к нашей ситуации). Таким образом, третий столбец нашей таблицы 2 «дожимается» до определения функции дожития. Что это означает?

Это означает, что если дана функция $s(x)$ со свойствами 1 – 4, то функция $F(x)=1-s(x)$ является функцией распределения некоторой случайной величины X: $F(x)=F_X(x)$. И ведь что интересно: так оно и будет! Сама X здесь даже не нужна: согласно «Зеленому Феллеру» (т. 1, с. 193), «термин *функция распределения* используется в математической литературе для неубывающих функций от x, стремящихся к 0 при $x \to -\infty$ и к 1 при $x \to \infty$». У Феллера ∞ и $+\infty$ – одно и то же; поэтому и мы обозначаем предел $\lim\limits_{x \to +\infty} s(x)$ то через $s(\infty)$, то $s(+\infty)$[15].

Пользуясь открывшейся оказией, перепишем из Феллера и про плотность распределения. «*Плотность распределения* – это неотрицательная функция $f(x)$, интеграл от которой по всей оси x равен единице». И еще немного: «Интеграл от $-\infty$ до x от любой плотности распределения является функцией распределения».

Что же касается сл. в. X, то мы просто предписываем вероятности события $X \le x$ определяться равенством $P(X \le x) = 1 - s(x)$, или еще проще: $P(X > x) = s(x)$. Попытка ухватить случай «за хвост»! Та еще попытка...

И в заключение нашего чуть затянувшегося лирического отступления – еще два замечания.

Одно из них связано с четвертым свойством функции $s(x)$ – непрерывностью. Дело в том, что ее можно заменять – например, на измеримость или интегрируемость по Лебегу. На «статус» $s(x)$ как функции дожития это не повлияет. Непрерывность выбирается потому, что обеспечивает применимость самой простой теории интегрирования – римановской. Она охватывает более узкий класс возможностей, чем лебеговская, но нам этого достаточно.

Второе замечание иногда уже напрашивалось выше и касается «реальной» области определения характеристик сл. в. X.

Речь идет вот о чем. Вначале мы вводили наши характеристики для $x \ge 0$. Затем, после таблицы 2 и феллеровского разъяснения стало ясно, что их нужно еще продолжить в область $x < 0$. Причем продолжить постоянной, равной значению соответствующей характеристики при $x = 0$. Тем не менее, «реальная» (т.е. там, где мы работаем) область определения указанных характеристик лежит в положительной части вещественной оси. Именно «лежит в», а не совпадает с ней, как, например, в модели де Муавра, где время жизни равномерно распределено на интервале $(0, \omega)$ и функции распределения и дожития, задаваемые на нем формулами $F_X(x) = x/\omega$ и $s(x) = 1 - x/\omega$, продолжаются на (ω, ∞) единицей и нулем, соответственно.

---

[15] Тогда уж следует вспомнить I семестр «Матана» и отметить, что символы $\pm\infty$ и ∞ представляют два *различных* подхода к заданию расширенной числовой прямой. Так что $+\infty$ и ∞ – не всегда одно и то же.

6. Первые задания

Первое же задание продолжает заключительную тему раздела 5. За задачами «лезем» в [Биг-Баг], с. 91 и далее.

1. (Задача 3.1.)

Воспользовавшись соображениями, суммированными в таблице 1, восполните пробелы в следующей таблице:

Таблица 3

$F_X(x)$	$s(x)$	$f_X(x)$	$\mu(x)$
			$\mathrm{tg}x,\ 0 \le x \le \pi/2$
	$e^{-x},\ x \ge 0$		
$1-1/(1+x)$			

Решение.

Нам нужно заполнить недостающие клеточки по имеющимся. Таким образом, данная таблица будет восстанавливаться по строкам.

Ограничимся первой строкой (остальные – читателю). Итак, нам дана функция $\mu(x)$. Мысленно наложим нашу первую строку на четвертую строку таблицы 1. Подставляя заданную функцию $\mu(x)$ в обнаруживаемые там формулы и проводя соответствующие вычисления, мы и заполним первую строку таблицы 3. Действуем.

Вначале вычислим интеграл

$$\int_0^x \mu(u)du = \int_0^x \mathrm{tg}u\,du = -\int_0^x \frac{d\cos u}{\cos u} = -\ln\cos u\Big|_0^x = -\ln\cos x,$$

участвующий в определении $s(x)$:

$$s(x) = e^{-\int_0^x \mu(u)du} = e^{\ln\cos x} = \cos x.$$

Отсюда уже последовательно получаем

$$f_X(x) = \mu(x)s(x) = \mathrm{tg}x \cdot \cos x = \sin x$$

и

$$F_X(x) = 1 - s(x) = 1 - \cos x.$$

2. (Задача 3.3.) Докажите, что функция $s(x)=e^{-x^3/12}$, $x \ge 0$, может быть функцией дожития, и укажите соответствующие $\mu(x)$, $f_X(x)$ и $F_X(x)$.

Решение. Вначале проверим выполнение для $s(x)$ свойств функции дожития (см. таблицу 3). Поведение экспоненты на концах положительной полуоси устанавливает, что $s(0)=1$ и $s(\infty)=0$. Кроме того, дифференцирование $s(x)$ дает

$$s'(x) = -\frac{x^2}{4} e^{-\frac{x^3}{12}} < 0 \text{ при } x > 0.$$

Отсюда ясно, что $s(x)$ не возрастает. Кроме того, из дифференцируемости $s(x)$ следует ее непрерывность. Как отмечено выше в финальной части раздела 5, на основании вышеизложенного можно сделать вывод, что $s(x)=e^{-x^3/12}$ – функция дожития. Значит, каждый элемент второй строки таблицы 1 действительно определяет функцию, обозначение и название которой приведено над ним в верхней строке.
Этими функциями будут

$F_X(x) = 1 - s(x) = 1 - e^{-\frac{x^3}{12}}$;

$f_X(x) = -s'(x) = \dfrac{x^2}{4} e^{-\frac{x^3}{12}} > 0$ при $x > 0$;

$\mu(x) = -\dfrac{s'(x)}{s(x)} = \dfrac{x^2}{4}$.

3. (Задача 3.4.) Покажите, почему ни одна из функций, приведенных в правой части следующих равенств, не может соответствовать обозначению, использованному в левой части:

(a) $\mu(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3}$, $x \ge 0$;

(b) $s(x) = 1 - \dfrac{22}{12}x + \dfrac{11}{8}x^2 - \dfrac{7}{24}x^3$, $0 \le x \le 3$;

(c) $f_X(x) = x^{n-1} e^{-\frac{x}{2}}$, $x \ge 0$, $n \ge 1$.

Решение.

(a) Проверим выполнение свойства $\int_0^{+\infty} \mu(x)dx = +\infty$ интенсивности смертности:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^3} dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)^2}\Bigg|_0^{+\infty} = +\frac{1}{2} < +\infty$$

– свойство не выполняется для функции $\dfrac{1}{(1+x)^3}$, которая, таким образом, не может соответствовать обозначению $\mu(x)$.

(b) Имеем $s(0)=1$ и $s(3)=\dfrac{1}{24}[24-132+297-189]=0$ – пока все идет нормально. Подсчитаем производную:

$$s'(x) = -\frac{22}{12}+\frac{11}{4}x-\frac{7}{8}x^2 = -\frac{1}{24}[44-66x+21x^2].$$

Подставляя сюда $x=1$, получим $s'(1)=\dfrac{1}{24}>0$, а для функции дожития должно быть $s'<0$ всюду на $[0,3)$. Значит, приведенный в п. (b) полином «не достоин» обозначения $s(x)$. В качестве самостоятельной работы читатель может убедиться в том, что и $s'(2)>0$.

(c) Посмотрим, верно ли характеристическое для плотности равенство

$$\int_0^{+\infty} f_X(x)dx = 1.$$

Вид интеграла от рассматриваемой функции демонстрирует его принадлежность «сфере влияния» Гамма-функции Эйлера $\Gamma(x)$. Вооружившись вторым томом Фихтенгольца ([Фихт-II], с. 753, 755), вычислим интеграл:

$$\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x/2}dx \overset{x=2t}{=} 2^n\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}dt = 2^n\Gamma(n) = 2^n(n-1)! \geq 2 \text{ при } n \geq 1$$

(помним, что $0!=1$). Полученная оценка показывает, что характеристическое свойство плотности для функции $x^{n-1}e^{-x/2}$ не выполняется.

7. Связь между распределениями сл. в. X и $T(x) = X - x$ (в условной модели)

Вот эта связь:

$$F_{T(x)}(t) = P(T(x) \le t) = P(X \le x+t) = F_X(x+t). \tag{7.1}$$

Посмотрим, какие у нее следствия:

1) Плотности распределений связаны равенством

$$f_{T(x)}(t) = f_X(x+t).$$

2) Вероятность $P(T(x) \le t \mid X > x)$ представляет функцию условного распределения сл. в. $T(x)$ при условии $X > x$:

$$F_{T(x)}(t \mid X > x) = P(T(x) \le t \mid X > x) = {}_t q_x =$$

$$= \frac{P(x < X \le x+t)}{P(X > x)} = \frac{F_X(x+t) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)}.$$

3) Условная плотность сл. в. $T(x)$ при условии $X > x$ получается из п. 2) дифференцированием по t:

$$f_{T(x)}(t \mid X > x) = \frac{d}{dt}\,{}_t q_x = \frac{f_X(x+t)}{1 - F_X(x)} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}\right] = -\frac{s'(x+t)}{s(x)} = -\frac{s(x+t)}{s(x)} \cdot \frac{s'(x+t)}{s(x+t)} = {}_t p_x \cdot \mu(x+t)$$

– по определению ${}_t p_x$ и $\mu(x)$.

4) Равенство концевых выражений второй строки цепочки п. 3) дает

$$-\frac{d}{dt}\,{}_t p_x = \frac{d}{dt}\; 1 - {}_t p_x \; = {}_t p_x \cdot \mu(x+t),$$

откуда

$$\mu(x+t) = -\frac{1}{{}_t p_x} \frac{d}{dt} {}_t p_x .$$

Если в последней формуле положить $x = 0$, а потом в получившемся равенстве заменить t на x, то получится соотношение

$$\mu(x) = -\frac{1}{{}_x p_0} \frac{d}{dx} {}_x p_0 ,$$

установленное в разделе 4.

5) Имеем

$$F_{T(x)}(\infty \mid X > x) = \lim_{t\to\infty} F_{T(x)}(t \mid X > x) = \lim_{t\to\infty} \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = 1,$$

так как $s(\infty) = 0$. Поэтому из п. 3) следует, что

$$\int_0^{\infty} {}_t p_x \cdot \mu(x+t) dt = 1 .$$

Замечание. Вернемся к п. 2) и 3) и обратим внимание читателя на то, что [Биг-Баг] на с. 68 приводит соответствующие выкладки в контексте *безусловной модели*: $F_{T(x)}(t) = {}_t q_x$ и $f_{T(x)}(t) = {}_t p_x \cdot \mu(x+t)$. Чтобы не сбивать читателя с толку, этим пока и ограничимся. Но данное замечание открывает перед нами еще один аспект.

В приведенных следствиях мы занимались *вычислениями*. Теперь перенесем акцент на *соотношения* и *определения*. Дело в том, что для неспециалиста условные распределения и условные плотности – вопрос всегда волнующий и загадочный. Поволнуемся еще немного...

6) Равенство концов первой строки в цепочке п. 3 с учетом п. 1 дает

$$f_{T(x)}(t \mid X > x) = \frac{f_X(x+t)}{1 - F_X(x)} = \frac{f_{T(x)}(t)}{1 - F_{T(x)}(0)}$$

– соотношение между условной плотностью распределения (при условии $X > x$) и безусловной плотностью распределения одной и той же сл. в. $T(x)$.

7) Посмотрим, каков аналог предыдущего свойства для самих функций распределения. Из п. 2) с учетом исходной связи (7.1) (все-таки пришлось ее пронумеровать!) получаем

$$F_{T(x)}(t \mid X > x) = \frac{F_X(x+t) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} = \frac{F_{T(x)}(t) - F_{T(x)}(0)}{1 - F_{T(x)}(0)}$$

– соотношение между условной функцией распределения (при условии $X > x$) и безусловной функцией распределения сл. в. $T(x)$.

Мы привели соотношения между функциями и плотностями условного и безусловного распределений одной и той же сл. в. $T(x)$. Теперь выясним, как связаны условные функции и плотности распределений двух случайных величин – $T(x)$ и X.

8) Сначала приведем аналог связи (7.1) для условных функций распределения. Сверяясь с п. 2), имеем:

$$F_{T(x)}(t \mid X > x) = P(T(x) \le t \mid X > x) =$$

$$= P(X \le x + t \mid X > x) = F_X(x + t \mid X > x).$$

9) Из п. 8) имеем

$$f_{T(x)}(t \mid X > x) = \frac{d}{dt} F_{T(x)}(t \mid X > x) =$$

$$= \frac{d}{du} F_X(u \mid X > x)\Big|_{u = x+t} \cdot \frac{d}{dt}(x + t) = f_X(x + t \mid X > x)$$

(ср. с первым равенством в цепочке п. 6).

Представим итоговую сводку формул настоящего раздела:

Соотношения между условными и безусловными функциями распределения и плотностями случайных величин X и $T(x)$.

$$F_{T(x)}(t) = F_X(x+t) \qquad F_{T(x)}(t \mid X > x) = F_X(x+t \mid X > x)$$

$$f_{T(x)}(t) = f_X(x+t) \qquad f_{T(x)}(t \mid X > x) = f_X(x+t \mid X > x)$$

$$F_{T(x)}(t \mid X > x) = \frac{F_{T(x)}(t) - F_{T(x)}(0)}{1 - F_{T(x)}(0)} \qquad f_{T(x)}(t \mid X > x) = \frac{f_{T(x)}(t)}{P(X > x)}$$

$$F_X(x+t \mid X > x) = \frac{F_X(x+t) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} \qquad f_X(x+t \mid X > x) = \frac{f_X(x+t)}{1 - F_X(x)}$$

Вычисление условных функций распределения и плотности сл. в. $T(x)$ в терминах характеристик сл. в. X.

$$F_{T(x)}(t \mid X > x) = {}_t q_x = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)}$$

$$f_{T(x)}(t \mid X > x) = \frac{d}{dt}\,{}_t q_x = -\frac{d}{dt}\,{}_t p_x =$$

$$= -\frac{s'(x+t)}{s(x)} = \frac{f_X(x+t)}{s(x)} = {}_t p_x \cdot \mu(x+t)$$

Упражнения. 1. Проверьте справедливость соотношений

$$F_X(x+t) = 1 - {}_t p_x \cdot {}_x p_0 = {}_t q_x \cdot {}_x p_0 + {}_x q_0 = {}_t q_x + {}_t p_x \cdot {}_x q_0 .$$

2. Выше, в п. 4), мы дифференцировали ${}_t p_x$ по t. Продифференцировав ${}_t p_x$ по x, убедитесь в том, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\,{}_t p_x = {}_t p_x[\mu(x) - \mu(x+t)] \quad \text{и} \quad \mu(x) = \frac{1}{{}_t p_x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\,{}_t p_x - \frac{\partial}{\partial t}\,{}_t p_x\right).$$

Почему выше использовался оператор d/dt, а теперь $\partial/\partial t$?

8. Аналогии между характеристиками для (0) и для (x) (в условной модели)

В течение предшествующих разделов в восприятии читателя должно было закрепиться заданное еще таблицей 1 представление о величинах F_X, s, f_X и μ как о едином, даже уже каноническом наборе характеристик сл. в. X.

В предыдущем разделе были установлены формулы связи между функциями распределения и плотности сл. в. X и $T(x)$, т.е. между $F_{T(x)}$ и F_X, а также $f_{T(x)}$ и f_X.

Возникает правомерный вопрос: можно ли распространить указанную связь на величины s и μ? При этом если определения для s_X и μ_X напрашиваются сами: $s_X(x) = s(x)$ и $\mu_X(x) = \mu(x)$, то как задавать характеристики $s_{T(x)}$ и $\mu_{T(x)}$, а также их условные аналоги?

Оказывается, все эти вопросы вполне разрешимы – по аналогии с уже имеющимися определениями. Итак, в разделе 8 мы получили

$$F_{T(x)}(t) = F_X(x+t), \quad f_{T(x)}(t) = f_X(x+t).$$

Естественно продолжить:

$$s_{T(x)}(t) = s_X(x+t), \quad \mu_{T(x)}(t) = \mu_X(x+t).$$

Что касается условных аналогов величин $s_{T(x)}$ и $\mu_{T(x)}$, то они конструируются в соответствии с принципами построения характеристик $s_X = s$ и $\mu_X = \mu$ в разделах 1 и 2. А именно,

$$s_{T(x)}(t \mid X > x) = 1 - F_{T(x)}(t \mid X > x) = 1 - {}_t q_x = \frac{s_X(x+t)}{s_X(x)},$$

$$\mu_{T(x)}(t \mid X > x) = \frac{f_{T(x)}(t \mid X > x)}{1 - F_{T(x)}(t \mid X > x)} = \frac{\dfrac{f_X(x+t)}{P(X > x)}}{\dfrac{s_X(x+t)}{s_X(x)}} = \frac{f_X(x+t)}{s_X(x+t)} = \mu_X(x+t)$$

на основании раздела 7.

В силу определения $\mu_{T(x)}$ устанавливаемое последней цепочкой равенство может быть записано в виде $\mu_{T(x)}(t \mid X > x) = \mu_{T(x)}(t)$.

Данное свойство $\mu_{T(x)}$ выражает интересный феномен: оказывается, *интенсивность смертности всегда безусловна!*

Итак, теперь мы можем завершить наше «актуарное исчисление», оформление которого было начато в разделе 7. Приведем вариант итогового результата. Справедливо

Предложение 8.1. *Пусть* $\mathcal{A}_X(x)$ *– набор характеристик, определенный в таблице 1, т.е.* $\mathcal{A}_X(x) = [F_X(x), f_X(x), s_X(x), \mu_X(x)]$. *Тогда наборы* $\mathcal{A}_X(x+t), \mathcal{A}_X(x+t \mid X>x)$, $\mathcal{A}_{T(x)}(t)$ *и* $\mathcal{A}_{T(x)}(t \mid X > x)$, *получающиеся из* $\mathcal{A}_X(x)$ *соответствующей заменой индекса и переменной, связаны следующими соотношениями.*

1) $\mathcal{A}_X(x+t \mid X>x)$ *и* $\mathcal{A}_X(x+t)$:

$$F_X(x+t \mid X>x) = \frac{F_X(x+t) - F_X(x)}{1 - F_X(x)}$$

$$f_X(x+t \mid X > x) = \frac{f_X(x+t)}{1 - F_X(x)}$$

$$s_X(x+t \mid X > x) = \frac{s_X(x+t)}{s_X(x)}$$

$$\mu_X(x+t \mid X > x) = \frac{f_X(x+t)}{1 - F_X(x+t)} \ ;$$

2) $\mathcal{A}_{T(x)}(t \mid X>x)$ *и* $\mathcal{A}_X(x+t \mid X>x)$:

$$F_{T(x)}(t \mid X > x) = F_X(x+t \mid X > x)$$

$$f_{T(x)}(t \mid X > x) = f_X(x+t \mid X > x)$$

$$s_{T(x)}(t \mid X > x) = s_X(x+t \mid X > x)$$

$$\mu_{T(x)}(t \mid X > x) = \mu_X(x+t);$$

3) $\mathcal{A}_{T(x)}(t \mid X>x)$ *и* $\mathcal{A}_{T(x)}(t)$:

$$F_{T(x)}(t \mid X > x) = \frac{F_{T(x)}(t) - F_{T(x)}(0)}{1 - F_{T(x)}(0)}$$

$$f_{T(x)}(t \mid X > x) = \frac{f_{T(x)}(t)}{1 - F_{T(x)}(0)}$$

$$s_{T(x)}(t \mid X > x) = \frac{s_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(0)}$$

$$\mu_{T(x)}(t \mid X > x) = \mu_{T(x)}(t);$$

4) $\mathcal{A}_{T(x)}(t)$ *и* $\mathcal{A}_X(x+t)$:

$$F_{T(x)}(t) = F_X(x+t)$$

$$f_{T(x)}(t) = f_X(x+t)$$

$$s_{T(x)}(t) = s_X(x+t)$$

$$\mu_{T(x)}(t) = \mu_X(x+t).$$

Упражнения. 1. Если $\mathcal{A}_X(x)=[F_X(x), f_X(x), s_X(x), \mu_X(x)]$, то ясно, что $\mathcal{A}_X(x+t)=[F_X(x+t), f_X(x+t), s_X(x+t), \mu_X(x+t)]$. Представьте в том же виде наборы $\mathcal{A}_X(x+t\,|X>x)$, $\mathcal{A}_{T(x)}(t)$ и $\mathcal{A}_{T(x)}(t\,|\,X>x)$.

2. В предложении 8.1 не зафиксированы взаимосвязи между наборами $\mathcal{A}_{T(x)}(t|X>x)$ и $\mathcal{A}_X(x+t)$, а также $\mathcal{A}_{T(x)}(t)$ и $\mathcal{A}_X(x+t\,|X>x)$. Какие соотношения между элементами наборов возникают в этих случаях?

3. Можно ли какие-либо из приведенных соотношений «перевести на язык» ${}_tp_x$ и ${}_tq_x$?

4. Искушенный преподаватель упрекнет составителя в увлечении схоластикой, искушенный студент заподозрит «прикол». Реконструируйте систему предпочтений преподавателя, если ее «увенчивают» формулировки, подобные предложению 8.1. Представитель какой отрасли знания получается в результате такой реконструкции?

Замечания. 1. Из всех наборов, фигурирующих в предложении 8.1, важнейшими для нас являются набор $\mathcal{A}_X(x)$ (или $\mathcal{A}_X(x+t)$, с которым можно отождествить $\mathcal{A}_{T(x)}(t)$ в силу п. 4 предложения 8.1) и набор $\mathcal{A}_{T(x)}(t\,|\,X>x)$. Эти два набора соответствуют состоянию в момент времени $x+t$ для лица (0) и лица (x), соответственно. Первое состояние зависит только от $x+t$ – вклад в эту сумму возраста x выделяется только для сравнения со вторым состоянием, где зависимость от x носит сущностный характер и зависит от вероятности события $X>x$. Приведем сопоставление вероятностных характеристик для (0) и (x), извлеченное из контекста [Фал] (с. 31-33 и 35):

(0)	(x)
$F(x)=P(X\le x)$; $F(0)=0$	$F_x(t)=P(T(x)\le t\,|\,X>x)=1-\dfrac{s(x+t)}{s(x)}$; $F_x(0)=0$
$s(x)=1-F(x)$	$s_x(t)=1-F_x(t)=\dfrac{s(x+t)}{s(x)}(={}_tp_x)$
$f(x)=\dfrac{d}{dx}F(x)$	$f_x(t)=f_{T(x)}(t\,|\,X>x)=\dfrac{d}{dt}F_x(t)=\dfrac{f(x+t)}{1-F(x)}=\dfrac{f(x+t)}{s(x)}$
$\mu(x)=\dfrac{f(x)}{1-F(x)}=\dfrac{f(x)}{s(x)}$	$\mu_x(t)=\dfrac{f_x(t)}{1-F_x(t)}=\dfrac{f(x+t)/s(x)}{s(x+t)/s(x)}=\dfrac{f(x+t)}{s(x+t)}=\mu(x+t)$.

Это и есть та самая аналогия, которая отмечена в названии настоящего раздела и призвана проиллюстрировать единство принципа построения обоих наборов. Характеристики набора $\mathcal{A}_X(x)$ даны в левой колонке, соответствующие им компоненты из $\mathcal{A}_{T(x)}(t \mid X > x)$ указаны в правой.

Упрощение в обозначениях понятно: мы будем возвращаться к вычислениям, и нам уже не нужно закладывать в обозначения принципы их построения и источники происхождения, как в предложении 8.1. Отметим лишь, что при переходе от левой колонки к правой x из переменной становится управляющим параметром.

Таким образом, противопоставление безусловной и условной моделей переходит здесь в противопоставление «актуарных позиций» лиц (0) и (x). Их «актуарные показатели жизнедеятельности» представлены выше в двух приведенных колонках.

2. Вернемся к безусловному характеру интенсивности смертности и посмотрим, как оно сформулировано в книге [Фал] (с. 35).

Соотношение $\mu_{T(x)}(t \mid X > x) = \mu_{T(x)}(t)$, или, эквивалентно, равенство $\mu_x(t) = \mu(x+t)$ в самом низу правой колонки «означает, что интенсивность смертности спустя время t для человека, которому сейчас x лет, равна интенсивности смертности в возрасте $x+t$ для новорожденного. Иными словами, интенсивность смертности в данном возрасте $x+t$ не зависит от уже прожитых лет».

3. В приведенных выше колонках привлекает внимание дополнительная аналогия между «хвостом» третьей сверху формулы для (x) и последней формулой для (0):

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)} = \frac{f(x)}{s(x)} \qquad\qquad f_x(t) = f_{T(x)}(t \mid X > x) = \frac{d}{dt}F_x(t) = \frac{f(x+t)}{1-F(x)} = \frac{f(x+t)}{s(x)}.$$

Отсюда следует, что $\mu(x) = f_x(0)$? Остановимся на этом подробнее.

Рассмотрим формальный, или, если угодно, математический аспект развиваемой «актуарной феноменологии». Выше при задании характеристик, зависящих от $x+t$, подразумевалось, что они определены при $x \ge 0$ и $t \ge 0$ (и даже $x > 0$ и $t > 0$). Такое неявное предположение проистекало из условий, как говорят, «физической реализуемости» модели и в особых комментариях не нуждается.

Естественный интерес может вызывать ситуация $0 < x + t \le x$ – благодаря тому, что ряд величин из предложения 8.1 имеет смысл и для отрицательных t, близких к нулю.

Рассмотрим данную ситуацию в рамках следующего утверждения. Здесь, как и выше, $F_x(t) = F_X(x+t|X > x)$, а через $F_x'(\tau+)$ и $F_x'(\tau-)$ обозначены, соответственно, правосторонняя и левосторонняя производные функции $F_x(t)$ в точке $t = \tau$. Справедливо

Предложение 8.2. *Пусть функция* $F_X(u)$ *непрерывно дифференцируема и* $F_X(u) < 1$ *при* $u \in (0, +\infty)$. *Тогда* $F_x'(0+) = \mu(x)$, а $F_x'(0-) = 0$.

Доказательство. Фиксируем произвольное $x > 0$. При $t > 0$ имеем

$$F_x(t) = \frac{F_X(x+t) - F_X(x)}{1 - F_X(x)}, \tag{8.1}$$

а для $t \le 0$ получаем

$$F_x(t) = P(X \le x+t \mid X > x) = \frac{P(x < X \le x+t)}{P(X > x)} = 0, \tag{8.2}$$

так как в этом случае событие $x < X \le x+t$ невозможно и его вероятность равна нулю.

Из (8.1) и (8.2) следует, что при $t > -x$ будет

$$F_x'(t) = \frac{f_X(x+t)}{1 - F_X(x)}, \; t > 0, \quad \text{и} \quad F_x'(t) = 0, \; t < 0.$$

Тогда, очевидно, существуют односторонние пределы $\lim\limits_{t \to 0+} F_x'(t) = \mu(x)$ и $\lim\limits_{t \to 0-} F_x'(t) = 0$. Согласно [Фихт-I] (с. 228) отсюда следует, что существуют и односторонние производные $F_x'(0+) = \mu(x)$ и $F_x'(0-) = 0$.

Предложение 8.2 доказано.

Из него немедленно следует, что если $\mu(x) > 0$ (а это эквивалентно неравенству $f_X(x) = F_X'(x) > 0$), то производная $F_x'(0)$ не существует. Значит, при $t = 0$ пользоваться третьей строчкой колонки (x) выше нельзя, несмотря на то, что ее правая часть имеет смысл и в этом случае.

Следовательно, равенство $\mu(x) = f_x(0)(= F_x'(0))$, с которого было начато замечание 3, вообще говоря, некорректно.

Как же спасти равенство $\mu(x) = f_x(0)$? Очень просто: поскольку функция f_x не определена в нуле, то ее можно доопределить, а так как развивавшаяся до сих пор аналитика актуальна только при $t > 0$, то естественно определить $f_x(0)$ как правостороннюю производную: $f_x(0) := F_x'(0+) = \mu(x)$. Тогда функция $f_x(t)$ будет непрерывной справа в нуле. Возвращаясь от $f_x(0)$ к «условным» обозначениям, получим

$$f_X(x \mid X > x) := f_X(x+ \mid X > x) = \mu(x),$$

или

$$f_{T(x)}(0 \mid X > x) := f_{T(x)}(0+ \mid X > x) = \mu(x).$$

Тем самым обоснован вывод, приведенный без доказательства в [Биг-Баг] (с. 67): для каждого возраста x функция $\mu(x)$ дает значение в точке x условной функции плотности сл. в X при условии дожития до возраста x (см. формулы (2.2) и (2.3)).

На той стадии изучения предмета, которая соответствует отмеченному месту в [Биг-Баг] (у нас это раздел 2) проверить данный вывод не представляется возможным. Необходимые для этого инструменты появляются только в конце раздела 7 и предложении 8.1.

Вопросы и упражнения. 5. Какие соображения лежат в основе модельных предположений $x \ge 0$ и $t \ge 0$?

6. Рассмотрите все характеристики из предложения 8.2 при $x > 0$ и установите, что будет, когда $t \le 0$. Что получается при $x = 0$?

7. Что сохраняется от предложения 8.2 при $x = 0$?

8. Попытайтесь доказать существование односторонних производных в обосновании предложения 8.2 непосредственно – без обращения к [Фихт-I].

9. Согласно [Фихт-I] (с. 229), если конечная производная $F_x'(t)$ существует в некотором промежутке, то она представляет собой функцию, которая не может иметь обыкновенных разрывов и скачков. Покажите, что здесь нет противоречия с утверждением предложения 8.2 и последующим доопределением $f_x(t)$ в нуле.

9. Основные актуарные величины, связанные с временем дожития $T(x)$

Введем ряд новых актуарных величин, но начнем с уже известных:

$$ {}_t p_x = P(T(x) > t \mid X > x) = P(X > x+t \mid X > x) $$ — вероятность того, что (x) достигнет возраста $x+t$;

$$ {}_t q_x = P(T(x) \le t \mid X > x) = P(X \le x+t \mid X > x) $$ — вероятность того, что (x) умрет в течение t ближайших лет.

При $t=1$ вводятся специальные обозначения:

$$ p_x = {}_1 p_x = P(T(x) > 1 \mid X > x) = P(X > x+1 \mid X > x) $$ — вероятность того, что (x) доживет до возраста $x+1$ лет;

$$ q_x = {}_1 q_x = P(T(x) \le 1 \mid X > x) = P(X \le x+1 \mid X > x) $$ — вероятность того, что (x) умрет в течение одного года.

Величина ${}_t p_x$ раскладывается на «годичные дожития»:

$$ {}_t p_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{s(x+1)}{s(x)} \cdot \frac{s(x+2)}{s(x)} \cdot \ldots \cdot \frac{s(x+t)}{s(x+t-1)} = p_x p_{x+1} \cdots p_{x+t-1}, $$

или, кратко,

$$ {}_t p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+t-1}. $$

Обобщение ${}_t q_x$:

$$ {}_{t|u} q_x = P(t < T(x) \le t+u \mid X > x) = P(T(x) \le t+u \mid X > x) - P(T(x) \le t \mid X > x) = {}_{t+u} q_x - {}_t q_x = {}_t p_x - {}_{t+u} p_x $$ — вероятность того, что (x) умрет в возрасте между $x+t$ и $x+t+u$ лет, т.е. проживет t лет и умрет в течение u последующих лет.

Характеристика ${}_{t|u}q_x$ записывается в терминах основных вероятностей:

$${}_{t|u}q_x = {}_t p_x - {}_{t+u} p_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} - \frac{s(x+t+u)}{s(x)} =$$

$$= \frac{s(x+t)}{s(x)}\left[1 - \frac{s(x+t+u)}{s(s+t)}\right] = {}_t p_x \cdot {}_u q_{x+t}$$

(выражение для ${}_u q_{x+t}$ восстанавливается по формуле п. 2 раздела 7). Итоговое равенство выпишем отдельно:

$${}_{t|u}q_x = {}_t p_x \cdot {}_u q_{x+t} \,.$$

В процессе его вывода было получено выражение вероятности ${}_{t|u}q_x$ в терминах функции дожития. Оно имеет вид

$${}_{t|u}q_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)} \,.$$

Отметим, что p-аналог вероятности ${}_{t|u}q_x$ в актуарной математике не предусмотрен.

Обзор новых обозначений завершает величина

$${}_{t|}q_x = {}_{t|1}q_x = P(t < T(x) \leq t+1 \,|\, X > x)$$

– вероятность того, что, прожив t лет, лицо (x) умрет в течение следующего за ними года.

Задачи. Снова «лезем» в [Биг-Баг], с. 91 и далее.

1. (Задача 3.5.) При $s(x) = 1 - \frac{x}{100}$, $0 \leq x \leq 100$, найдите (a) $\mu(x)$, (b) $F_X(x)$, (c) $f_X(x)$ и (d) $P(10 < X < 40)$.

Мы находимся «под юрисдикцией» закона де Муавра с предельным возрастом $\omega = 100$ (о самом законе поговорим в соответствующем разделе).

Однако упражнение настолько простое, что мы сразу оставляем его читателю. Разве что приведем решение пункта (d). Согласно (2.1) будет $P(10 < X \le 40) = F_X(40) - F_X(10)$, а так как $F_X(x) = 1 - s(x) = = x/100$, то $P(10 < X \le 40) = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3$.

2. (Задача 3.6.) Используя функцию дожития из предыдущей задачи, определите функцию дожития, интенсивность смертности и плотность распределения продолжительности предстоящей жизни для лица (40).

Решение. Используем обозначения из замечания 1 раздела 8 (правая колонка). Имеем

$$s_{40}(t) = \frac{s(40+t)}{s(40)} = \frac{1-((40+t)/100)}{1-40/100} = 1 - \frac{t}{60}.$$

Далее, так как $\mu(x) = 1/(100-x)$, то

$$\mu_{40}(t) = \mu(40+t) = \frac{1}{60-t}.$$

Наконец, поскольку $f(x) = f_X(x) = 1/100$, в итоге получаем

$$f_{40}(t) = \frac{f(40+t)}{s(40)} = \frac{1/100}{60/100} = \frac{1}{60}.$$

3. (Задача 3.7).

При $s(x) = [1-(x/100)]^{1/2}$, $0 \le x \le 100$, найдите (a) ${}_{17}p_{19}$, (b) ${}_{15}q_{36}$, (c) ${}_{15|13}q_{36}$, (d) $\mu(36)$ и (e) $E(T(36) \mid X > 36)$.

Решение. (a) Так как ${}_t p_x = s(x+t)/s(x)$, то

$${}_{17}p_{19} = \frac{s(36)}{s(19)} = \frac{[1-(36/100)]^{1/2}}{[1-(19/100)]^{1/2}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{81}} = \frac{8}{9}.$$

(b) Имеем

$${}_{15}q_{36} = 1 - {}_{15}p_{36} = 1 - \frac{s(51)}{s(36)} = 1 - \frac{(49/100)^{1/2}}{(64/100)^{1/2}} = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}.$$

(c) Запишем вероятность ${}_{15|13}q_{36}$ в терминах функции дожития:

$$ {}_{15|13}q_{36} = \frac{s(36+15)-s(36+15+13)}{s(36)} = \frac{s(51)-s(64)}{s(36)} = $$
$$ = \frac{(49/100)^{1/2}-(36/100)^{1/2}}{(64/100)^{/2}} = \frac{1}{8}. $$

(d) Так как

$$ s'(x) = -\frac{1}{200}\frac{1}{[1-(x/100)]^{1/2}}, $$

откуда

$$ s'(36) = -\frac{1}{200}\cdot\frac{1}{(64/100)^{1/2}} = -\frac{1}{160}, $$

то

$$ \mu(36) = -\frac{s'(36)}{s(36)} = \frac{1/160}{8/10} = \frac{1}{128}. $$

(e) Введение в тему «Условное математическое ожидание» довольно демократично представлено в главе 4 книги [Бор]. Воспользовавшись приведенными там определениями (с. 69-70), с учетом п. 3) раздела 7 запишем

$$ E(T(36)\,|\,X>36) = \int_0^{100} t\, f_{T(36)}(t\,|\,X>36)dt = -\int_0^{100} t\frac{s'(36+t)}{s(36)}dt. $$

Так как $s(x)=0$ при $x\ge 100$ (почему?), то верхний предел интегрирования в правой части только что выписанной цепочки уменьшается со 100 до 64:

$$ E(T(36)\,|\,X>36) = -\int_0^{64} t\frac{s'(36+t)}{s(36)}dt = $$

$$ = \frac{1}{s(36)}\left\{-ts(36+t)\Big|_0^{64} + \int_0^{64} s(36+t)dt\right\} = \frac{1}{s(36)}\int_0^{64} s(36+t)dt = $$

$$= \frac{1}{s(36)} \int_0^{64} \left(1 - \frac{36+t}{100}\right)^{1/2} dt = -\frac{200}{3s(36)} \left(1 - \frac{36+t}{100}\right)^{3/2} \Bigg|_0^{64} =$$

$$= \frac{10}{8} \cdot \frac{200}{3} \left(\frac{64}{100}\right)^{3/2} = \frac{200}{3} \left(\frac{8}{10}\right)^2 = \frac{2 \cdot 64}{3} = \frac{128}{3}.$$

Возникшее в данной задаче условное математическое ожидание – хороший повод посмотреть на него еще раз, но уже, так сказать, в общем случае.

10. Макрохарактеристики сл. в. X и несобственные интегралы

Прежде чем заняться условным математическим ожиданием, поговорим, как водится, о безусловном. Но еще раньше следует отметить, что данный и следующий разделы следуют плану изложения соответствующих подразделов из [Фал], с. 33 и 37, – так сказать, в благодарность за название. Термин «макрохарактеристика» делает изложение солидным и современным. Мы словно оказываемся у кормил мировой экономики, которым не страшны ни «рецессии», ни «битвы за урожай».

Другое дело, что «следуют плану» – слишком громко сказано. В упомянутых подразделах [Фал] просто перечислены формулы для определения среднего, дисперсии и медианы, а также еще кое-чего для соответствующих случайных величин, и даны некоторые комментарии. Мы же будем эти формулы доказывать, а по существу – исследовать несобственные интегралы специального вида.

1) Первой макрохарактеристикой является

Среднее время жизни (математическое ожидание сл. в. X)

$$\overset{\circ}{e}_0 = E(X) = \int_0^{\infty} x f_X(x) dx = -\int_0^{\infty} x s'(x) dx.$$

Сразу приведем другое выражение для $\overset{\circ}{e}_0$, которое иногда (как, например, в [Фал], с. 33) используется в качестве определения среднего времени жизни:

$$\overset{\circ}{e}_0 = \int_0^\infty s(x)dx.$$

Оба выражения связаны интегрированием по частям

$$-\int_0^\infty xs'(x)dx = -xs(x)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty s(x)dx = \int_0^\infty s(x)dx,$$

которое устанавливает эту связь при условии $xs(x)\Big|_0^\infty = 0$, т.е.

$$\lim_{x\to\infty} xs(x) = 0. \qquad (10.1)$$

Теперь займемся обоснованиями. Вначале приведем одно вспомогательное утверждение. Доказательство не приводим – его можно найти в одном из двух классических руководств: в «Задачах и теоремах из анализа» Г. Полиа и Г. Сеге [ПС-1] (отдел 2, № 113, с. 85 и 256) и в «Сборнике задач и упражнений по математическому анализу» Б.П. Демидовича [Дем] (с. 209, № 2389)[16]. Итак, имеет место

Лемма 10.1. *Если* $s(x)$ *монотонна в интервале* $1 \le x < \infty$ *и интеграл* $\int_1^\infty x^a s(x)dx$ *существует, то* $\lim_{x\to\infty} x^{a+1}s(x) = 0$.

Теперь сформулируем и докажем утверждение, которое будет обосновывать приведенную выше связь между двумя представлениями для среднего времени жизни. Как известно, формула интегрирования по частям содержит три выражения. В случае несобственных интегралов достаточно, чтобы два из них имели смысл, тогда «существование третьего отсюда уже вытекает» ([Фихт-II], с. 602). В идеале хотелось бы, чтобы было достаточно существования одного!

В следующем утверждении указанный идеал частично достигается. А именно, справедливо следующее

[16] Составитель не мог отказать себе в удовольствии еще раз проговорить легендарные имена! Есть своя прелесть в пожелтевших и ломких страницах...

Предложение 10.1. *Пусть функция дожития* $s(x)$ *непрерывно дифференцируема на* $[0,+\infty)$. *Тогда сходимости любого из интегралов* $-\int_0^\infty xs'(x)dx$ *или* $\int_0^\infty s(x)dx$ *достаточно для выполнения условия* (10.1), *и оба интеграла сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Если сходится интеграл $\int_0^\infty s(x)dx$, то предельное соотношение (10.1) следует из леммы 10.1 при $a=0$.

Пусть теперь сходится интеграл $-\int_0^\infty xs'(x)dx$. Тогда в силу основной формулы интегрального исчисления для несобственных интегралов ([Фихт-II], с. 554-555) и свойств функции дожития будут выполняться неравенства

$$0 \le xs(x) = x\int_x^\infty (-s'(t))dt \le -\int_x^\infty ts'(t)dt\,, \tag{10.2}$$

причем ([Фихт-II], с. 559) выражение в правой части сходится к нулю при $x \to \infty$. Применение к выписанной цепочке неравенств «правила двух милиционеров» и завершает обоснование предложения 10.1.

Итак, мы установили, что если среднее $E(X)$ существует (запись $E(X) < \infty$), то

$$E(X) = -\int_0^\infty xs'(x)dx = \int_0^\infty s(x)dx\,.$$

Теперь мы хотим получить такое обобщение данного факта: если момент $E(X^n)$ n-го порядка сл. в. X существует, то

$$E(X^n) = -\int_0^\infty x^n s'(x)dx = n\int_0^\infty x^{n-1}s(x)dx\,.$$

Указанное обобщение опирается на следующий аналог предложения 10.1.

Предложение 10.2. *Пусть функция дожития* $s(x)$ *непрерывно дифференцируема на* $[0,+\infty)$. *Тогда сходимости любого из интегралов* $-\int_0^\infty x^n s'(x)dx$ *или* $\int_0^\infty x^{n-1}s(x)dx$ *достаточно для выполнения условия*

$$\lim_{x\to\infty} x^n s(x) = 0,$$

и оба интеграла сходятся или расходятся одновременно.

Упражнения. 1. Возможны ли ситуации, когда условие (10.1) выполняется, а оба интеграла, определяющие $\overset{\circ}{e}_0$, не сходятся?

2. Разберите доказательство предложения 10.1. Что утверждает основная формула интегрального исчисления для несобственных интегралов и где она используется? Почему выражение в правой части (10.2) сходится к нулю при $x\to\infty$? Подробно проследите за переходами в цепочке (10.2). Где и как используются свойства функции дожития? Перепишите доказательство, заменив ссылки на [Фихт-II] надлежащими формулами и свойствами.

3. Проведите доказательство предложения 10.2 с учетом вопросов, аналогичных заданным в упражнении 2.

4. Докажите лемму 10.1. Какой должна быть функция $s(x)$ – непрерывной, дифференцируемой или принадлежащей какому-то другому классу? Чем определяется такой выбор?

5. Убедитесь в том, что если в формуле интегрирования по частям для несобственного интеграла два выражения имеют смысл, то существование третьего очевидно.

6. Напишите формулу интегрирования по частям, которая лежит в основе определения $E(X^n)$ и предложения 10.2.

7. Покажите, что в случае сходимости интеграла $\int_0^\infty s(x)dx$ его «хвост» $\int_x^\infty s(t)dt$ сходится к нулю при $x\to\infty$.

2) Второй макрохарактеристикой является

Дисперсия времени жизни

$$D(X) = \mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2,$$

где, как мы уже знаем, $E(X)=\overset{\circ}{e}_0$, а для вычисления $E(X^2)$ все уже подготовлено в п. 1) (предложение 10.2 при $n=2$). Поэтому можно записать

$$E(X^2)=\int_0^\infty x^2 f_X(x)dx=-\int_0^\infty x^2 ds(x)=$$

$$=-x^2 s(x)\Big|_0^\infty+2\int_0^\infty xs(x)dx=2\int_0^\infty xs(x)dx.$$

3) Наконец, третья макрохарактеристика сл. в. X – это

Медиана времени жизни $m=m(0)$, которая определяется как корень уравнения $s(m)=1/2$.

Перефразируя [Фал], с. 33, можно сказать, что медиана времени жизни – это возраст, до которого доживает ровно половина всех сверстников, имеющих одну и ту же функцию дожития.

11. Макрохарактеристики сл. в. $T(x)$: $\overset{\circ}{e}_x$ и $\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|}$

Действуем по тому же плану, что и в предшествующем разделе.

1) *Среднее время дожития,* или *полная ожидаемая продолжительность жизни* определяется как условное математическое ожидание, обещанное в позапрошлом разделе:

$$\overset{\circ}{e}_x=E(T(x)\,|\,X>x)=\int_0^\infty t\,f_{T(x)}(t\,|\,X>x)dt.$$

Согласно п. 3) и 4) раздела 7 имеем $f_{T(x)}(t\,|\,X>x)={}_t p_x\cdot\mu(x+t)$ и $-d\,{}_t p_x/dt={}_t p_x\cdot\mu(x+t)$, что позволяет преобразовать среднее время дожития с помощью формулы интегрирования по частям – аналогично тому, как это было сделано в разделе 10. Итак,

$$\overset{\circ}{e}_x=\int_0^\infty t\cdot{}_t p_x\mu(x+t)dt=-\int_0^\infty t\,d\,{}_t p_x=-t\,{}_t p_x\Big|_0^\infty+\int_0^\infty {}_t p_x dt=$$

$$=\int_0^\infty {}_t p_x dt=\frac{1}{s(x)}\int_0^\infty s(x+t)dt=\frac{1}{s(x)}\int_x^\infty s(u)du.$$

Корректность проведенных преобразований удостоверяет следующее

Предложение 11.1. *Пусть функция дожития* $s(x)$ *непрерывно дифференцируема на* $[0,+\infty)$ *и* ${}_t p_x = s(x+t)/s(x)$. *Тогда для любого* $x \in [0,+\infty)$ *сходимости любого из интегралов* $-\int_0^\infty t(d\,{}_t p_x/dt)dt$ *или* $\int_0^\infty {}_t p_x dt$ *достаточно для выполнения условия*

$$\lim_{t\to\infty} t\,{}_t p_x = 0,$$

и оба интеграла сходятся или расходятся одновременно.

Упражнения. 1. Докажите предложение 11.1 по аналогии с его предшественниками из раздела 10. Данную аналогию проясняет использование обозначения $s_x(t) = {}_t p_x$ из правой колонки замечания 1 раздела 8. Но упрощает ли оно доказательство предложения 11.1? В том смысле, что достаточно проверить для $s_x(t)$ свойства функции дожития и воспользоваться предложением 10.1?

2. Постройте ${}_t p_x$-аналог предложения 10.2.

3. Объясните, каким образом предложение 11.1 удостоверяет корректность приведенных выше преобразований?

2) Для вычисления *дисперсии времени дожития* вычислим сначала второй момент сл. в. $T(x)$, а именно

$$E[T(x)^2 \mid X > x] = \int_0^\infty t^2 f_{T(x)}(t \mid X > x)dt = \int_0^\infty t^2 \cdot {}_t p_x \mu(x+t)dt =$$

$$= -\int_0^\infty t^2 d\,{}_t p_x = -t^2\,{}_t p_x\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty t\,{}_t p_x dt = 2\int_0^\infty t\,{}_t p_x dt = \frac{2}{s(x)}\int_0^\infty ts(x+t)dt\,.$$

Возникающие здесь **упражнения** очевидны и состоят в проверке корректности только что проведенных преобразований. Нужно убедиться в том, что для такой проверки все уже подготовлено выше, и подобрать нужные утверждения.

Дисперсия времени дожития вычисляется по формуле

$$D[T(x)\,|\,X>x]=E[T(x)^2\,|\,X>x]-\{E[T(x)\,|\,X>x]\}^2=$$

$$=\int_0^\infty t^2\cdot{}_t\,p_x\mu(x+t)dt-\left(\overset{\circ}{e}_x\right)^2=2\int_0^\infty t\,{}_t\,p_x dt-\left(\overset{\circ}{e}_x\right)^2.$$

3) *Медиана продолжительности предстоящей жизни* лица (x) есть корень $m(x)$ уравнения $P(T(x)>m(x)\,|X>x)=1/2$, или

$${}_{m(x)}\,p_x=\frac{s(x+m(x))}{s(x)}=\frac{1}{2}.$$

Следует отметить, что медианы среди макрохарактеристик $T(x)$ в [Фал] (с. 37) нет (зато она есть в [Биг-Баг] на с. 78). Вместо нее дана характеристика $\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|}$, которой мы сейчас и займемся, отправляясь от упражнения 3.16 на с. 92 в [Биг-Баг].

4) Для величины $\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|}$ используется одно из следующих названий: *частичная средняя продолжительность жизни,* или *усеченная полная ожидаемая продолжительность жизни,* или *функция усеченного математического ожидания*.

Задание характеристики $\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|}$ осуществляется формулой

$$\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|}=E[\overline{T}(x)\,|\,X>x],$$

где случайная величина $\overline{T}(x)$ определяется соотношением

$$\overline{T}(x)=\begin{cases}0, & T(x)\le 0,\\ T(x), & 0<T(x)\le n,\\ n, & T(x)>n.\end{cases}$$

Срезка $\overline{T}(x)$ функции $T(x)$ имеет более удобное представление в виде

$$\overline{T}(x)=T(x)I_{\{0<T(x)\le n\}}+nI_{\{T(x)>n\}}+0\cdot I_{\{T(x)\le 0\}},\qquad(11.1)$$

Для краткости обозначим $I=I_{\{0<T(x)\le n\}}$.

Напомним, что случайная величина I есть измеримая функция $I = I(\omega)$ на пространстве элементарных событий Ω, равная единице во всех точках $\omega \in \Omega$, в которых $0 < T(x) \le n$, и равная нулю на остальной части Ω. Отсюда и название I – индикатор множества $0 < T(x) \le n$.

Отсутствие в записи $T(x)$ явной зависимости от $\omega \in \Omega$ не должно никого ни обманывать, ни смущать; такая зависимость имеет место, именно она и превращает $T(x)$ в случайную величину. Устранение из обозначений ω и Ω можно объяснить двояко. С одной стороны, это делается, чтобы не перегружать формулы, с другой – отражает своего рода ритуальную искушенность, степень посвящения в таинства науки, изучающей *Его Величество Случай*[17]. См. [Бор], с. 47.

В актуарном контексте для нас важна зависимость от x, в контексте математического анализа – тем более. Поэтому исходного обозначения $T(x)$ нам вполне хватало. А вот при работе «на поле» теории вероятностей (или функционального анализа) иногда полезнее использовать вместо записи $T(x)$ обозначение, скажем, $T_x(\omega)$. Но мы этого делать не будем благодаря той самой искушенности, частично приобретенной за время изучения предмета (см. также раздел 2).

Итак, из представления (11.1) следует, что

$$\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|} = E[\overline{T}(x) \mid X > x] = E[T(x)I \mid X > x] + nP[T(x) > n \mid X > x],$$

причем $P[T(x) > n \mid X > x] = {}_n p_x$. Остается вычислить $E[T(x)I \mid X > x]$.

Так как

$$E[T(x)I \mid X > x] = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_{T(x)I}(t \mid X > x)dt,$$

то сначала нам придется вычислять функцию распределения случайной величины $T(x)I$ при условии $X > x$, т.е. $T(x) > 0$. Имеем

$$F_{T(x)I}(t \mid X > x) = P[T(x)I \le t \mid T(x) > 0] = \frac{P(A_t)}{P(X > x)},$$

где $A_t = \{\omega \in \Omega : T(x)I \le t, T(x) > 0\}$. Благодаря двум срезкам случайной величины $T(x)$ – нулем и числом n – пространство Ω разбивается на

[17] Еще одна версия – зависимость от ω не любят статистики.

три части. В точках $\omega \in \Omega$, где $T(x) \le 0$ или $T(x) > n$, будет $T(x)I = 0$, а в точках $\omega \in \Omega$ со свойством $0 < T(x) \le n$ имеет место $T(x)I = T(x)$. С помощью этой «рандомизации» вычислим $P(A_t)$.

1) Если $t < 0$, то $A_t = \varnothing$, значит, $P(A_t) = 0$.

2) При $t = 0$ имеем $A_0 = \{\omega \in \Omega : T(x) > n\}$, следовательно, $P(A_0) = = 1 - F_{T(x)}(n)$.

3) В случае $0 < t \le n$ множество A_t представляет собой дизъюнктное объединение множеств A_0 и $\{\omega \in \Omega : 0 < T(x) \le t\}$, поэтому $P(A_t) = 1 - F_{T(x)}(n) + F_{T(x)}(t) - F_{T(x)}(0)$. Наконец,

4) когда $t > n$, будет $A_t = \{\omega \in \Omega : T(x) > 0\}$ и $P(A_t) = 1 - F_{T(x)}(0)$.

Объединяя формулы пунктов 2) и 3) в одну, устанавливаем, что

$$F_{T(x)I}(t \mid X > x) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ {}_n p_x + F_{T(x)}(t \mid X > x), & 0 \le t \le n, \\ 1, & t > n, \end{cases}$$

с использованием результатов раздела 4 и п. 7) раздела 7. Дифференцированием получаем отсюда $f_{T(x)I}(t \mid X > x) = f_{T(x)}(t \mid X > x)$ при $0 < t < n$ и $f_{T(x)I}(t \mid X > x) = 0$ при $t < 0$ и $t > n$. На поведении функции плотности в точках $t = 0$ и $t = n$ не останавливаемся, поскольку на результат ее интегрирования оно не влияет. Итог:

$$E[T(x)I \mid X > x] = \int_0^n t\, f_{T(x)}(t \mid X > x)dt.$$

Мы доказали первую часть следующего утверждения.

Предложение 11.2. *При условии непрерывной дифференцируемости функции дожития $s(t)$ имеют место формулы*

(a) $$\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n t\,{}_t p_x \mu(x+t)dt + n\,{}_n p_x = \int_0^n {}_t p_x dt,$$

(b) $D[\overline{T}(x)\,|\,X>x]=\int\limits_0^n t^2\,{}_t p_x\mu(x+t)dt+n^2\,{}_n p_x-\left(\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|}\right)^2=$

$$=2\int\limits_0^n t\,{}_t p_x dt-\left(\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|}\right)^2.$$

Данное предложение как раз и составляет содержание упражнения 3.16 на с. 92 в [Биг-Баг].

Упражнения и вопросы. 4. Доведите цепочку равенств для $\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|}$ до формулы п. (a) предложения 11.2. В чем аналогия с вычислением $\overset{\circ}{e}_x$ и в чем упрощение по сравнению с указанным вычислением?

5. В книге [Фал], с. 37, частичная средняя продолжительность жизни определяется как $\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|}=E[\hat{T}(x)\,|\,X>x]$, где $\hat{T}(x)=\min(T(x),n)$, или

$$\hat{T}(x)=\begin{cases}T(x), & T(x)\le n,\\ n, & T(x)>n.\end{cases}$$

Убедитесь, что такое определение $\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|}$ также приводит к формуле п. (a) предложения 11.2.

6. В упомянутой задаче 3.16 из [Биг-Баг] усеченная полная ожидаемая продолжительность жизни задавалась с помощью равенства

$$\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|}=E[T^*(x)\,|\,X>x],\ \text{где}\quad T^*(x)=\begin{cases}T(x), & 0<T(x)\le n,\\ n, & n<T(x).\end{cases}$$

Очевидно (в отличие от ситуаций с $\overline{T}(x)$ и $\hat{T}(x)$), величина $T^*(x)$ не определена при $T(x)\le 0$. Почему? Как преодолеть эту недоопределенность $T^*(x)$, чтобы вывести формулу п. (a) предложения 11.2.

7. Возвращаясь к нашему исходному доказательству предложения 11.2 и обратившись к [Бор], с. 69-70 и 47, можно записать (в чем-то даже на пределе понимания)

$$E[T(x)I\,|\,X>x]=\frac{1}{P(X>x)}\int_\Omega (T(x)I)P(d\omega\cap\{X>x\})=$$

$$= \frac{1}{P(X > x)} \int_{T(x)>0} (T(x)I)P(d\omega) = \frac{1}{P(X > x)} \int_0^n t\, f_{T(x)}(t)dt =$$

$$= \int_0^n t\, f_{T(x)}(t \mid X > x)dt\,,$$

и не нужно никаких сложностей с A_t. «Доведите до ума» этот подход.

8. Почему нам можно не знать значения функции $f_{T(x)I}(t \mid X > x)$ в точках $t = 0$ и $t = n$, чтобы ее интегрировать? А в каких-то других точках? Сколько может быть таких точек? Как доопределить функцию $f_{T(x)I}(t \mid X > x)$ при $t = 0$ и $t = n$? Еще раз прочитайте замечание 3 в разделе 8.

9. Разберите приведенный выше вывод соотношения

$$E[T(x)I \mid X > x] = \int_0^n t\, f_{T(x)}(t \mid X > x)dt\,.$$

В частности, проверьте отыскание A_t и вычисление $P(A_t)$. Докажите равенство

$$F_{T(x)I}(t \mid X > x) = {}_n p_x + F_{T(x)}(t \mid X > x) = {}_n p_x + {}_t q_x$$

при $0 \le t \le n$.

10. Покажите, что если $\overset{\circ}{e}_x$ существует, то $\overset{\circ}{e}_x = \lim\limits_{n\to\infty} \overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|}$. Какое свойство несобственных интегралов здесь используется? Всегда ли существует $\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|}$?

11. Как из представления (11.1) получается формула

$$\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|} = E[T(x)I \mid X > x] + n\,{}_n p_x\,?$$

12. Докажите п. (b) предложения 11.2, а также его аналог для случайной величины $T(x)$, вычисляющий дисперсию времени дожития (см. п. 2) настоящего раздела).

13. На каком промежутке достаточно требовать непрерывной дифференцируемости функции дожития в предложении 11.2 – на луче $[0,\infty)$ или на полуинтервале $[0,n)$?

………………

Ввиду того исключительного значения, которое приобретают в данной книге несобственные интегралы, приведем заключение об их месте и роли в анализе, принадлежащее признанному авторитету. Мы употребляем слово «авторитет» в значении, традиционно приписываемом гуманитарному знанию, в котором *мнение* авторитета распознается представителями других областей знания как рассматриваемое на равных с *доказательством*. Итак, в свое время составителя поразил вот такой вердикт [Евг], с. 10-11:

«Понятие несобственного интеграла оформилось в XIX веке и до сих пор используется в элементарных учебниках математического анализа, хотя с современной точки зрения оно уже давно утратило смысл».

Вот это да! – подумал тогда составитель. – Значит, мы тратили столько усилий «в поисках утраченного смысла»? А теперь еще и студентов мучаем?..

Однако не все так просто. Недавно, перечитав приведенные выше «огненные строки», составитель перевернул страницу и неожиданно увидел продолжение:

«Мы уже говорили в начале этого пункта, что с точки зрения современных представлений понятие несобственного интеграла утратило смысл. Здесь следует различать понятия абсолютной и условной сходимости.

Рассмотрим сначала вопрос об абсолютной сходимости несобственных интегралов[18].

В современной математике интеграл Римана давно уступил место интегралу Лебега. Если рассматривать несобственный интеграл Римана, то его абсолютная сходимость является следствием существования этого интеграла как интеграла Лебега. Впрочем, в защиту классического наследия стоит сказать, что мы имеем здесь дело скорее с терминологическим улучшением.

[18] Нам этого вполне достаточно, так как мы интегрируем только неотрицательные функции.

Действительно, вопрос существования интеграла Лебега от измеримой функции легко сводится к выяснению абсолютной сходимости некоторого несобственного интеграла, понимаемого в смысле Римана...

...Таким образом, хотя при переходе к интегралу Лебега само понятие абсолютной сходимости утрачивает смысл, признаки абсолютной сходимости остаются полезными для исследования вопроса о существовании интеграла».

Столько лет жить под грузом бессмысленного существования!.. Понятия уходят, признаки остаются актуальными...
Вот как важно вовремя перевернуть страницу...

....

Во второй главе настоящего пособия «сила вещей» заставит нас несколько изменить угол зрения на предмет. Таблицы смертности с их конкретными цифрами создадут иллюзию выхода в реальный мир, атмосфера книги покажется более актуарной, функция дожития скроется в тени l_x. Пока этого не произошло, ситуация настоятельно рекомендует сделать обзор заданий из [Биг-Баг], которые еще можно решить на основе материала, изложенного в главе I. Точнее, заданий, условия которых внушают надежду, что их можно решить на указанной основе. Нас ждут сюрпризы и «кажущиеся противоречия», которые мы постараемся разрешить во второй главе книги.

......

§*. Обзор некоторых заданий[19]

Подобно тому, как «Фал» решает задачи из разных источников, мы будем решать задачи из «Биг-Бага», который дает только ответы. (За самого «Фал» мы, если и возьмемся, то позднее.)

1. (Задача 3.9.) Найдите ${}_{2|2}q_{20}$, если $\mu(x) = 0,001$ для $20 \le x \le 25$.

[19] Параграф со звездочкой используется для сквозной темы – упражнений (изобретение профессора А.П. Нордена, см. [Ка], с. 21). Кроме того, мы не хотим начинать вторую главу с тринадцатого раздела.

Решение. Величина ${}_{2|2}q_{20}$ – вероятность того, что лицо (20) проживет еще 2 года, а потом умрет в течение двух последующих лет, т.е. между двадцатью двумя и двадцатью четырьмя годами.

В разделе 9 находим формулу

$$ {}_{t|u}q_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} - \frac{s(x+t+u)}{s(x)}, $$

куда подставим $x = 20$, $t = u = 2$. Запись $s(x)$ в терминах $\mu(x)$ находим из уже подзабытой таблицы 1, клеточка (4,2):

$$ s(x) = e^{-\int_0^x \mu(\sigma)d\sigma} = e^{-0{,}001x}. $$

В итоге

$$ {}_{2|2}q_{20} = \frac{s(22)-s(24)}{s(20)} = \frac{e^{-0{,}022} - e^{-0{,}024}}{e^{-0{,}020}} = e^{-0{,}002} - e^{-0{,}004} = $$

$$ = 0{,}99800199\ldots - 0{,}99600798\ldots = 0{,}00199401\ldots \approx 0{,}001994. $$

Задача, очевидно, простая, но использовать ее в контрольной работе имеет смысл только при наличии у студентов соответствующих вычислительных возможностей.

В оставшихся четырех задачах возникает эффект дополнительного назидания, что делает их скорее частью теоретического материала. Однако тем самым мы получаем источник дополнительных заданий.

2. (Задача 3.18.) Пусть функция плотности с.в. T задается соотношением $f_T(t) = ce^{-ct}$ для $t \ge 0$, $c > 0$. Подсчитайте

(a) $\overset{\circ}{e}_x = E[T]$, (b) $D[T]$, (c) медиану с.в. T, (d) моду распределения с.в. T.

Решение. Если бы не запись $\overset{\circ}{e}_x = E[T]$, а в пункте (а) требовалось бы просто найти $E[T]$, то ничто не связывало бы данную задачу с актуарными расчетами, и ее можно было бы воспринимать как стандартную задачу из курса теории вероятностей. Однако сопоставление указанной записи с определением

$$ \overset{\circ}{e}_x = E[T(x) \mid X > x] = \int_0^\infty t\, f_{T(x)}(t \mid X > x)dt $$

из раздела 11 (п. 1) пробуждает не только старое беспокойство по поводу условной и безусловной моделей. Перед нами возникает грозный призрак самого настоящего противоречия...

«Давайте не будем нервничать и во всем спокойно разберемся», – сказал когда-то сыщик из одного старого сериала[20]. Последуем этому совету и рассмотрим обе интерпретации данной задачи.

А) *Решение задачи* 2 *как теоретико-вероятностной*.

(a) Среднее:

$$E[T] = \int_0^\infty t\, f_T(t)dt = \int_0^\infty cte^{-ct}dt =$$

$$= -\int_0^\infty tde^{-ct} = -te^{-ct}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-ct}dt = -\frac{1}{c}e^{-ct}\Big|_0^\infty = \frac{1}{c}.$$

(b) Второй момент:

$$E[T^2] = \int_0^\infty t^2 f_T(t)dt = \int_0^\infty ct^2 e^{-ct}dt = -\int_0^\infty t^2 de^{-ct} =$$

$$= -t^2 e^{-ct}\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty te^{-ct}dt = \frac{2}{c}E[T] = \frac{2}{c^2}.$$

Дисперсия:

$$D[T] = E[T^2] - E[T]^2 = \frac{1}{c^2}.$$

(c) Медиана m – корень уравнения

$$P(T > m) \equiv 1 - F_T(m) \equiv e^{-cm} = \frac{1}{2}, \text{ т.е. } \quad m = \frac{\ln 2}{c}.$$

(d) Мода – точка максимума функции f_T: $t = 0$.

Увлекшись [Фал], мы не включили моду в число макрохарактеристик наших случайных величин. Мода – это любая точка максимума функции плотности (в нашем случае – единственная); данное определение взято из «Математической энциклопедии», т. 3, с. 763. Конечно, лучше было бы сослаться на Гмурмана, но это надо идти в библиотеку, а на улице плюс тридцать (сейчас 13.56 15 июля 2014 г.).

[20] «Профессия – следователь» (1984), Б.И. Антонов в исп. Георгия Буркова.

Перейдем к следующей интерпретации.

Б) *Решение задачи 2 как актуарной*.

Вначале восстановим актуарный контекст. Исходим из того, что $f_{T(x)}(t \mid X > x) = ce^{-ct}$. Тогда из соотношения

$$F_{T(x)}(t \mid X > x) \equiv 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - e^{-ct}$$

(см. пункт 2 раздела 7) следует, что

$$\frac{s(x+t)}{s(x)} = e^{-ct}, \text{ т.е. } \quad s(t) = e^{-ct} \quad \text{и} \quad {}_t p_x = e^{-ct}.$$

Таким образом, восстанавливается набор характеристик $\mathcal{A}_X(x)$ сл. в. X:

$$F_X(x) = 1 - e^{-cx}, \; f_X(x) = ce^{-cx}, \; s(x) = e^{-cx}, \; \mu(x) \equiv c.$$

Интересно, что набор $\mathcal{A}_{T(x)}(t \mid X > x)$ содержит те же характеристики, только x заменяется на t. В этой связи возникает

Замечание. Мы установили, что оба набора содержат одинаковые характеристики, различающиеся только обозначением переменной: $\mathcal{A}_{T(x)}(t \mid X > x) = \mathcal{A}_X(t)$. Но тогда «актуарное решение» должно давать те же самые ответы, что и «теоретико-вероятностное»!

Проверим это. Будем опираться на соответствующие формулы п. 2 раздела 11, а также на вычисления конкретных интегралов из п. А).

(a) Среднее время дожития:

$$\overset{\circ}{e}_x = E[T(x) \mid X > x] = \int_0^\infty {}_t p_x dt = \int_0^\infty e^{-ct} dt = \frac{1}{c}.$$

(b) Второй момент и дисперсия времени дожития:

$$E[T(x)^2 \mid X > x] = 2\int_0^\infty t \, {}_t p_x dt = 2\int_0^\infty te^{-ct} dt = \frac{2}{c^2},$$

$$D[T(x)^2 \mid X > x] = \frac{1}{c^2}$$

– все так же, как и выше.

(c) Медиана времени дожития $m(x)$ – корень уравнения

$$ {}_{m(x)}p_x = \frac{s(x+m(x))}{s(x)} = \frac{1}{2}, \text{ т.е. } e^{-cm} = \frac{1}{2}, \text{ откуда } m = \frac{\ln 2}{c}. $$

(d) Мода: еще раз об определении. Согласно [Биг-Баг], с. 78, «мы также можем найти моду распределения с.в. $T(x)$, указав значение t, которое доставляет максимальное значение функции ${}_t p_x \mu(x+t)$».

Так как (раздел 7, п. 3) $f_{T(x)}(t \mid X > x) = {}_t p_x \mu(x+t)$, то это правило согласуется с определением моды как любой точки максимума плотности, а так как $f_{T(x)}(t \mid X > x) = ce^{-ct}$, то единственной модой вновь будет точка $t = 0$.

Итак, решения А) и Б) приводят к одинаковым ответам.

Теперь проанализируем обе постановки.

Нам была дана функция $f_T(t) = ce^{-ct}$, $t \ge 0$, $c > 0$. Если она представляет условную функцию плотности случайной величины $T(x)$, то есть имеет место равенство $f_T(t) = f_{T(x)}(t \mid X > x)$, то мы можем восстановить весь набор $\mathcal{A}_X(x)$, другими словами, весь актуарный контекст. При этом безусловная функция распределения и безусловная функция плотности сл. в $T(x)$ вычисляются, соответственно, как

$$ F_{T(x)}(t) = 1 - e^{-c(x+t)} \quad \text{и} \quad f_{T(x)}(t) = ce^{-c(x+t)}. $$

Если же функция $f_T(t)$ есть «безусловная» функция плотности $f_{T(x)}(t)$, то $F_X(x)$ как функция одной переменной x не восстанавливается: $F_{T(x)}(t) = F_X(x+t) = 1 - e^{-ct}$ и $F_X(x) = 0$ для любого x. Либо мы должны считать $F_X(x+t)$ функцией переменных x и t.

Тем не менее, при обоих подходах соответствующие характеристики пунктов (a) – (d) совпадают.

Упражнение. Построить пример, когда не совпадают.

3. (Задача 3.19.) Если $\mu(x+t) = t$, $t \ge 0$, то подсчитайте

(a) ${}_t p_x \mu(x+t)$, (b) $\overset{\circ}{e}_x$.

Указание. Вспомните известный факт из теории вероятностей, что $e^{-t^2/2}/\sqrt{2\pi}$ является функцией плотности стандартного нормального распределения, т.е. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}dt = 1$.

Решение. Умудренные предшествующим опытом, начнем с вопросов корректности. Подставляя в равенство $\mu(x+t)=t$ сначала $x=1$, $t=2$, а потом $x=2$, $t=1$, последовательно получаем $\mu(3)=2$ и $\mu(3)=1$. Подобные вещи могут обескуражить кого угодно, но только не актуариев. Последние просто переходят к обозначению $\mu_x(t)$, как это сделано в [Биг-Баг] при изучении, скажем, актуарной стоимости. Получается, что при различных x величины $\mu_x(t)$ представляют собой «совершенно разные вещи». Объяснение будет дано ниже.

Какого же решения ждет от читателя задача 3.19 из [Биг-Баг]? Интегрированием из

$$\mu(x+t) \equiv -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)} = t$$

или сразу из формулы

$$ {}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu(x+s)ds} = e^{-t^2/2} \qquad (*)$$

(см. разделы 8 и 4) будем иметь $s(x+t)=s(x)e^{-t^2/2}$.

«При других обстоятельствах» из последнего равенства подстановкой $x=0$ мы получили бы выражение для s: $s(t)=e^{-t^2/2}$, тогда самое равенство можно было бы переписать в виде

$$s(x+t)=s(x)s(t). \qquad (*_1)$$

С другой стороны, подставляя в полученное выражение для s величину $x+t$ вместо t, мы пришли бы к $s(x+t)=s(x)s(t)e^{-xt}$. А это противоречит соотношению $(*_1)$, если $x \neq 0$ и $t \neq 0$.

Разумеется, не этого ждут от нас авторы [Биг-Баг]. Попутно отметим, что из (*) будем иметь

$$F_{T(x)}(t \mid X > x) = 1 - {}_t p_x = 1 - e^{-t^2/2}$$

и далее

$$f_{T(x)}(t \mid X > x) = te^{-t^2/2},\ s_{T(x)}(t \mid X > x) = e^{-t^2/2} \text{ и } \mu_{T(x)}(t \mid X > x) = t.$$

Таким образом, мы можем восстановить «условный актуарный контекст» в виде семейства характеристик $\mathcal{A}_{T(x)}(t \mid X > x)$, однако семейства $\mathcal{A}_X(x)$ (как одномерного!) по нему уже не восстановишь.

В качестве предварительного итога можно сделать такой вывод.

В предыдущей задаче выбор $f_{T(x)}(t) = f_X(x+t) = ce^{-ct}$ не является порождающим для актуарного контекста, а переход к условной функции плотности $f_{T(x)}(t \mid X > x) = ce^{-ct}$ такой контекст порождает.

В настоящей задаче ни условный, ни безусловный подходы не восстанавливают указанный контекст. Причина кроется в том, что интенсивность $\mu_{T(x)}$ всегда безусловна: $\mu_{T(x)}(t \mid X > x) = \mu_{T(x)}(t)$.

Интересно отметить, что здесь мы имеем пример, когда нельзя восстановить левую колонку по правой в замечании 1 из раздела 8.

Объяснение обнаруженных эффектов дано в [Биг-Баг] на с. 86. А именно, «дополнительная информация о лице возраста x может сделать исходную функцию дожития непригодной для вычисления вероятностных утверждений о продолжительности предстоящей жизни лица (x)». В качестве примеров приводятся прохождение дополнительного обследования с последующим страхованием или получение инвалидности в возрасте x.

«В этих двух примерах следует отдать предпочтение специальной интенсивности смертности, учитывающей конкретную информацию, которая становится известной в возрасте x». Такая специальная интенсивность $\mu_x(t)$ в момент $x+t$ есть функция двух переменных – конкретной информации, за которую отвечает x, и величины t.

Без этой конкретной информации интенсивность $\mu(x+t)$ зависит только от одной переменной – достигнутого возраста $x+t$.

Резюме: при наличии дополнительной информации о лице (x) «полная модель для таких лиц является *набором функций дожития*, по одной для каждого возраста» x.

Данный подход развивается в рамках идеологии селекционных таблиц смертности. А исследуемые задачи показывают возможности математики в построении существенно двумерных семейств $\mu_x(t)$.

Да, чуть не забыл! Правильные ответы в рассматриваемой задаче получаются так.

(a) Из условия и формулы (*) получаем ${}_t p_x \mu(x+t) = te^{-t^2/2}$.

(b) По формуле из раздела 11 с учетом указания к условию задачи имеем

$$\overset{\circ}{e}_x = \int_0^\infty {}_t p_x dt = \int_0^\infty e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

4. (Задача 3.20.) Пусть функция распределения сл. в. $T(x)$ имеет вид

$$F_{T(x)}(t) = \begin{cases} t/(100-x), & 0 \le t < 100-x, \\ 1, & t \ge 100-x. \end{cases}$$

Подсчитайте

(a) $\overset{\circ}{e}_x$, (b) $D[T(x)]$, (c) медиану случайной величины $T(x)$.

Решение. Формула из п. 7) раздела 7 дает

$$F_{T(x)}(t \mid X > x) = \frac{F_{T(x)}(t) - F_{T(x)}(0)}{1 - F_{T(x)}(0)} = F_{T(x)}(t),$$

так как, по условию задачи, $F_{T(x)}(0) = 0$.

Сразу отметим следующее. В задаче 2 безусловный и условный подходы приводили к одним и тем же ответам, но различались в способности восстановления набора $\mathcal{A}_X(x)$. В рассматриваемой задаче оба подхода эквивалентны, в частности, демонстрируют одни и те же ответы и одну и ту же неспособность порождать набор $\mathcal{A}_X(x)$ как одномерный.

Переходим к решению и, как и выше, пользуемся формулами из раздела 11. По определению $F_{T(x)}(t \mid X > x)$ имеем

$${}_t p_x = \begin{cases} 1 - t/(100-x), & 0 \le t < 100-x, \\ 0, & t \ge 100-x. \end{cases}$$

(a) Среднее время дожития

$$\mathring{e}_x = \int_0^{100-x} \left(1 - \frac{t}{100-x}\right) dt = \left(t - \frac{1}{100-x}\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{100-x} = \frac{100-x}{2}.$$

(b) Дисперсия времени дожития

$$D[T(x) \mid X > x] = 2\int_0^{100-x} t\left(1 - \frac{t}{100-x}\right) dt - \left(\mathring{e}_x\right)^2 =$$

$$= 2\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{100-x}\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{100-x} - \left(\mathring{e}_x\right)^2 =$$

$$= \frac{(100-x)^2}{3} - \frac{(100-x)^2}{4} = \frac{(100-x)^2}{12}.$$

(c) Медиана времени дожития определяется из уравнения

$${}_{m(x)}p_x \equiv 1 - \frac{m(x)}{100-x} = \frac{1}{2}, \text{ откуда } m(x) = \frac{100-x}{2}.$$

5. (Задача 3.21.) Покажите, что

(a) $\frac{\partial}{\partial x}\,{}_t p_x = {}_t p_x[\mu(x) - \mu(x+t)]$, (b) $\frac{d}{dx}\mathring{e}_x = \mathring{e}_x\,\mu(x) - 1$.

(Там есть еще задание (c), но всему свое время.)

Решение. Сразу отметим, что пункт (a) содержится в упражнении 2 к разделу 7. Так что решать мы будем задание (b).

Вначале – арифметика, под которой мы понимаем следование сложившимся стереотипам, ритуалам и рецептам вычислений. Имеем

$$\frac{d}{dx}\mathring{e}_x = \frac{d}{dx}\int_0^\infty {}_t p_x dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\,{}_t p_x dt = \int_0^\infty {}_t p_x[\mu(x) - \mu(x+t)]dt =$$

$$= \mu(x)\int_0^\infty {}_t p_x dt - \int_0^\infty {}_t p_x \mu(x+t)dt = \mu(x)\mathring{e}_x - 1.$$

Здесь мы использовали задание (a) и формулу п. 5) раздела 7, которая наконец-то пригодилась.

Чтобы утверждать, что задание (b) выполнено, нам остается проверить корректность проделанных операций. Ясно, что переход от интеграла разности к разности интегралов обосновывается достаточно просто...

Упражнение. Обосновать!

...Поэтому нам предстоит сосредоточиться на проверке перестановочности операторов дифференцирования и несобственного интегрирования в приведенной выше цепочке. То есть обосновать ее второе равенство. Тогда задание (b) будет выполнено.

Для указанной проверки нам потребуется вновь погрузиться в контекст теории несобственных интегралов. В качестве опорной теоремы естественно использовать теорему 3 из [Фихт-II], с. 712. Данная теорема как раз и посвящена отмеченной выше перестановочности.

Отметим, что в нашем задании переменные t и x изменяются на вещественной положительной полуоси, но в теореме переменная x будет пробегать конечный отрезок вида $[0,u]$ с любым положительным u. Подобное обстоятельство не является препятствием в применении указанной теоремы к нашей ситуации. Дело в том, что, выбирая произвольную точку на луче $[0,\infty)$, чтобы доказывать в ней нужное нам свойство, мы всегда можем погрузить ее в отрезок вида $[0,u]$ и доказывать это свойство уже на нем. Такая процедура является стандартной для математического анализа.

Итак, в «наших обозначениях» теорема Фихтенгольца имеет следующий вид. Обозначим $\Pi_u = \{(t,x) : t \ge 0, 0 \le x \le u\}$.

Теорема. *Пусть функция* ${}_t p_x$ *непрерывна по переменным* $t \ge 0$ *и* $x \in [0,u]$ *в отдельности и имеет производную* $(\partial/\partial x)\,{}_t p_x$*, непрерывную в полуполосе* Π_u *по совокупности указанных переменных. Предположим далее, что интеграл* $I(x) = \int_0^\infty {}_t p_x dt$ *сходится для всех* $x \in [0,u]$*, а интеграл* $\int_0^\infty (\partial/\partial x)\,{}_t p_x dt$ *сходится равномерно по переменной* x *на отрезке* $[0,u]$*. Тогда при любом* $x \in [0,u]$ *имеет место формула*

$$I'(x) = \int_0^\infty (\partial/\partial x)\,{}_t p_x dt. \qquad (*_2)$$

Исходные условия на ${}_t p_x$ в данной теореме имеют все-таки промежуточный характер, так как их проверка все равно потребует работать с $s(x+t)/s(x)$. Это вполне соответствует «идеологии» раздела 11, когда исходные условия связаны с функцией $s(x)$. Поэтому снабдим теорему Фихтенгольца естественным объектом применения, который и даст нужный нам результат.

Следствие. *Пусть на луче* $[0,+\infty)$ *функция дожития* $s(x)$ *непрерывно дифференцируема и существует несобственный интеграл* $\overset{\circ}{e}_x = I(x) = \int_0^\infty {}_t p_x dt$, *где* ${}_t p_x = s(x+t)/s(x)$. *Тогда для любого* $x \in [0,\infty)$ *имеет место формула* ($*_2$)*, а значит, и формула* (b).

Доказательство следствия. В силу замечания перед формулировкой теоремы Фихтенгольца доказывать будем только соотношение ($*_2$), причем, в силу того же замечания, не на луче $[0,\infty)$, а на конечном отрезке $[0,u]$ для произвольного фиксированного $u \in [0,\infty)$.
Итак, благодаря непрерывной дифференцируемости функции дожития функция ${}_t p_x$ будет непрерывной в полуполосе Π_u не только по каждой из переменных в отдельности, но и по их совокупности, вместе со своими частными производными первого порядка. Так что первое условие теоремы Фихтенгольца выполняется.

Далее, второе условие – сходимость интеграла $I(x)$ – есть следствие существования среднего времени дожития.

Докажем третье условие – равномерную сходимость по x на отрезке $[0,u]$ интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} {}_t p_x dt = \int_0^\infty \left[\frac{s'(x+t)}{s(x)} - \frac{s'(x)}{s(x)^2} s(x+t) \right] dt. \qquad (*_3)$$

Обоснование будем перемежать с упражнениями. Начнем с такого.

Упражнение. Для равномерной сходимости интеграла в ($*_2$) и равенства в ($*_3$) достаточно равномерной сходимости по x на отрезке $[0,u]$ интегралов $\int_0^\infty \frac{s'(x+t)}{s(x)} dt$ и $\int_0^\infty \frac{s'(x)}{s(x)^2} s(x+t) dt$.

Чтобы исследовать первый из них, введем функцию

$$S(x,v)=\frac{1}{s(x)}\int_0^v s'(x+t)dt=\frac{s(x+v)}{s(x)}-1.$$

Ясно, что для любого фиксированного $x\in[0,u]$ будет

$$\int_0^\infty \frac{s'(x+t)}{s(x)}dt=\lim_{v\to+\infty} S(x,v)=-1.$$

Упражнение. Интеграл $\int_0^\infty \frac{s'(x+t)}{s(x)}dt$ равномерно сходится по x в $[0,u]$ $\Leftrightarrow$ функция $\frac{s(x+v)}{s(x)}\to 0$ равномерно на $[0,u]$ при $v\to+\infty$.

Докажем правое (нижнее) утверждение данной эквивалентности. На языке «$\varepsilon-\delta$» оно записывается так:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\Delta>0\ \forall v>\Delta\ \forall x\in[0,u]\ \ (0<)\frac{s(x+v)}{s(x)}<\varepsilon. \qquad (*_4)$$

Данное утверждение складывается из двух следующих:

i) в силу невозрастания функции дожития имеем

$$\frac{s(x+v)}{s(x)}\le\frac{s(v)}{s(u)}$$

для любого $x\in[0,u]$;

ii) так как $s(v)\to 0$ при $v\to+\infty$, то

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\Delta>0\ \forall v>\Delta\ \ (0<)\frac{s(v)}{s(u)}<\varepsilon.$$

Упражнение. 1) Из i) и ii) выведите ($*_4$). 2) Попытайтесь доказать правое утверждение эквивалентности из предыдущего упражнения на основе обобщенного признака Дини; см. [Фихт-II], с. 657.

Теперь займемся интегралом $\int_0^\infty \frac{s'(x)}{s(x)^2} s(x+t)dt$.

Упражнение. Производная s' ограничена на $[0,u]$.

Это означает существование постоянной $M_u > 0$, такой, что имеет место оценка $|s'(x)| \le M_u$ для всех $x \in [0,u]$. Вновь используя монотонность функции дожития, будем иметь

$$\left| \frac{s'(x)}{s(x)^2} s(x+t) \right| \le \frac{M_u}{s(u)^2} s(x+t) \le \frac{M_u}{s(u)^2} s(t). \qquad (*_5)$$

Далее, интеграл $I(0) = \int_0^\infty s(t)dt$ сходится по условию. Отсюда и из ($*_5$) по признаку Вейерштрасса [Фихт-II], с. 685, следует равномерная сходимость исследуемого интеграла $\int_0^\infty \frac{s'(x)}{s(x)^2} s(x+t)dt$.

Доказательство следствия завершено.

Упражнение. Проверьте, что мы фактически доказали все переходы в цепочке равенств, которую в самом начале решения назвали «арифметикой».

Глава II. Таблицы смертности

12. Величины l_x и $_n d_x$

В предшествующей главе изучалось, так сказать, актуарное время, точнее, движение лица (x) во времени и соответствующие этому движению характеристики «темпорального поля». В предстоящей главе к актуарному времени добавится «пространственная», а в чем-то даже и «скоростная» координата l_x, которая будет бесстрастно фиксировать шествие по жизни сменяющих друг друга поколений...

…………..

Рассмотрим группу из l_0 новорожденных. Обычно используется значение $l_0 = 100000$. Предполагается, что для каждого новорожденного = лица (0) из этой группы сл. в. X = «возраст в момент смерти» имеет распределение, задаваемое функцией дожития $s(x)$.

Эту группу из l_0 новорожденных называют *совокупностью случайного дожития* [Биг-Баг], с. 70. Мы также будем говорить о ней как о (l_0)-*совокупности* или *группе* (l_0).

Перенумеруем всех l_0 новорожденных из рассматриваемой группы: $j = 1, 2, \ldots, l_0$. Тогда j-му лицу (0) соответствует случайная величина X_j (возраст j-го члена группы в момент смерти) с функцией дожития $s(x)$, одной и той же для всех j: $P(X_j > x) = s(x)$.

Введем индикатор дожития лица с номером j, т.е. функцию

$$I_j = I_j(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если } j-\textit{е лицо доживет до возраста } x, \quad \textit{т.е. } X_j > x, \\ 0 & \textit{в противном случае,} \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{т.е. } X_j \le x. \end{cases}$$

Обозначим через $\mathcal{L}(x)$ число лиц рассматриваемой группы, доживших до возраста x. Тогда

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{j=1}^{l_0} I_j .$$

Коль скоро $E[I_j] = 1 \cdot P(X_j > x) + 0 \cdot P(X_j \le x) = s(x)$, имеем

$$l_x := E[\mathcal{L}(x)] = \sum_{j=1}^{l_0} E[I_j] = l_0 s(x) .$$

Словами: l_x – математическое ожидание числа доживших до возраста x из (l_0)-совокупности.

Предложение 12.1. *Если индикаторы I_j взаимно независимы, то сл. в. $\mathcal{L}(x)$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n = l_0$ и $p = s(x)$.*

Доказательство. Поскольку все I_j взаимно независимы, набор $I_1, I_2, \ldots, I_n$ можно рассматривать как последовательность испытаний Бернулли, т.е. повторных независимых испытаний с вероятностью успеха (единицы) в одном испытании, равной $p = s(x)$, и вероятностью неудачи (нуля) в одном испытании, равной $1 - p = 1 - s(x)$.

Тогда

$$P[\mathcal{L}(x) = k] = P[I_1 + \ldots + I_n = k] = \textit{вероятность } k \textit{ успехов}$$
$$(\textit{и } n-k \textit{ неудач}) \textit{ в } n \textit{ испытаниях} = C_n^k s(x)^k (1 - s(x))^{n-k},$$

а это и означает, что сл. в. $\mathcal{L}(x)$ имеет биномиальное распределение с указанными параметрами. См. также [Фе-I], с. 164-165.

Через ${}_n\mathcal{D}_x$ обозначим число умерших в возрасте между x и $x+n$ из (l_0)-совокупности. По определению,

$${}_n\mathcal{D}_x = \mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(x+n).$$

Введем величину

$${}_n d_x = E[{}_n\mathcal{D}_x] = E[\mathcal{L}(x)] - E[\mathcal{L}(x+n)] =$$

$$= l_0[s(x) - s(x+n)] = l_x - l_{x+n}; \;\; d_x := {}_1 d_x.$$

13. Свойства l_x

Выводимые ниже формулы можно считать «переводом на язык l_x» ряда базовых соотношений разделов 2 – 4 и 9. Мы не ставили целью построение полного каталога взаимосвязей; поиск исходных формул в указанных разделах также оставляем читателю. Итак,

1) ${}_n p_x = \dfrac{l_{x+n}}{l_x}, \quad {}_n q_x = \dfrac{l_x - l_{x+n}}{l_x}, \quad {}_{t|u} q_x = \dfrac{l_{x+t} - l_{x+t+u}}{l_x};$

2) $l_x = l_0 s(x) = l_0 e^{-\int_0^x \mu(\sigma) d\sigma};$

3) $l_{x+n} = l_x \cdot {}_n p_x = l_x e^{-\int_x^{x+n} \mu(\sigma)d\sigma} = l_x e^{-\int_0^n \mu(x+t)dt}$;

4) из $l_x = l_0 s(x)$ и $\mu(x) = -\dfrac{s'(x)}{s(x)}$ следует $\mu(x) = -\dfrac{1}{l_x}\dfrac{dl_x}{dx}$, тогда соотношение $-\dfrac{dl_\sigma}{d\sigma} = l_\sigma \mu(\sigma)$ влечет за собой цепочку равенств

$$l_x - l_{x+n} = -l_\sigma\Big|_x^{x+n} = \int_x^{x+n} l_\sigma \mu(\sigma)d\sigma = \int_0^n l_{x+t}\mu(x+t)dt;$$

5) из $l_x = l_0 s(x)$ имеем $l_x \mu(x) = l_0 f_X(x)$, тогда дифференциальное уравнение п. 4) можно переписать в виде $-\dfrac{dl_x}{dx} = l_0 f_X(x)$, откуда

$$l_x - l_{x+n} = l_0 \int_x^{x+n} f_X(\tau)d\tau = l_0[F_X(x+n) - F_X(x)].$$

Связь F_X и s показывает, что мы получили формулу, которая завершила предыдущий раздел.

Выписанные утверждения в основном связаны с характеристиками сл. в. X. Взаимосвязям с характеристиками сл. в. $T(x)$ посвящен следующий раздел.

14. Среднее число лет

В качестве своеобразной разминки выпишем несколько формул из разделов 10 и 11. Это величины, которые потребуются ниже.

Среднее время жизни $\overset{\circ}{e}_0 = -\int_0^\infty ts'(t)dt = \int_0^\infty s(t)dt$.

Среднее время дожития $\overset{\circ}{e}_x = \int_0^\infty t\, {}_t p_x \mu(x+t)dt = \int_0^\infty {}_t p_x dt$

$$= -\frac{1}{s(x)}\int_0^\infty ts'(x+t)dt = \frac{1}{s(x)}\int_0^\infty s(x+t)dt.$$

Частичное среднее время дожития

$$\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n t\,{}_t p_x \mu(x+t)dt + n\,{}_n p_x = \int_0^n {}_t p_x dt$$

$$= -\frac{1}{s(x)}\int_0^n ts'(x+t)dt + n\frac{s(x+n)}{s(x)} = \frac{1}{s(x)}\int_0^n s(x+t)dt\,.$$

Отметим, что среднее время жизни приведено здесь для полноты (аналогии), а название «частичное среднее время дожития» используется для краткости.

Начнем с величины ${}_nL_x$, которая определяется как *общее ожидаемое число лет, прожитых в возрастном интервале между* x *и* $x+n$ *дожившими до возраста* x *лицами из совокупности случайного дожития*.

В [Биг-Баг], с. 79, величина ${}_nL_x$ определяется как

$${}_nL_x = \int_0^n tl_{x+t}\mu(x+t)dt + nl_{x+n}, \tag{14.1}$$

причем интеграл в правой части интерпретируется как ожидаемое число лет, прожитых в возрастном интервале между x и $x+n$ теми лицами (x), кто умер в этом возрастном интервале, а nl_{x+n} равно числу лет, прожитых в возрастном интервале между x и $x+n$ теми (x), кто дожил до возраста $x+n$.

Если приведенный «физический смысл» числа nl_{x+n} почти очевиден, то истолкование интеграла справа привносит в нашу повесть элементы детектива. Как увидеть в этом интеграле «число лет»?

> Единственное, что заслуживает внимания в этом
> деле – цепь рассуждений от следствия к причине.
>
> *Шерлок Холмс*[21]

Последуем совету великого сыщика. Будем считать, что формула (14.1) есть следствие, и начнем «разматывать» причину.

[21] Артур Конан Дойл. Знак четырех. Цит. по [До], с. 14.

${}_nL_x$: *от истолкования к определению*

Величину ${}_nL_x$ можно переписать в двух формах. Первая связывает ${}_nL_x$ с частичным средним временем дожития, т.е. с условным математическим ожиданием сл. в. $T(x)$:

$$ {}_nL_x = l_0\left[-\int_0^n ts'(x+t)dt + ns(x+n)\right] = l_x \overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|};$$

см. «разминку» в начале раздела. Вторая форма ${}_nL_x$ раскрывает ее «безусловную сущность», т.е. задание в терминах безусловного распределения сл. в. $T(x)$:

$$ {}_nL_x = l_0\left[\int_0^n tf_{T(x)}(t)dt + n(1-F_{T(x)}(n))\right];$$

см. раздел 13.

а) *Условное задание.*

Сначала – один маленький этюд из «Знака четырех». Как известно, выяснить, что Дж. Г. Уотсон утром ходил на почту, можно по красноватой глине на его ботинках. Такая глина есть только у самой почты, но чтобы узнать об этом и – самое важное – чтобы Дж. Г. Уотсон вляпался в нее, нужно, чтобы рядом с почтой велись земляные работы и чтобы Ш. Холмс об этом знал.

Роль земляных работ в нашем исследовании играет разработка определения частичного среднего времени дожития, предпринятая в п. 4) раздела 11:

$$\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|} = E[\overline{T}(x) \mid X > x],$$

где случайная величина $\overline{T}(x)$ определяется соотношением (11.1). Это определение позволяет записать

$$ {}_nL_x = l_x \overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|} = l_x E[T(x)I \mid X > x] + nl_x \cdot {}_np_x,$$

где I – индикатор множества $\{\omega \in \Omega : 0 < T(x) \le n\}$.

Второе слагаемое равно nl_{x+n}, с ним мы разобрались выше. Займемся первым.

Как мы помним из раздела 12, l_x есть математическое ожидание числа доживших до возраста x из (l_0)-совокупности. Величину же $E[T(x)I \mid X > x]$ можно интерпретировать как ожидаемую продолжительность жизни лица (x) в возрастном интервале между x и $x+n$, умершего в этом интервале.

Таким образом, произведение ожидаемого числа лиц, оставшихся в (l_0)-совокупности к моменту x, т.е. лиц (x), на ожидаемую продолжительность жизни в интервале $(x, x+n]$ для одного такого лица (x), умершего в возрасте между x и $x+n$ лет, представляет ожидаемое число лет, прожитых в указанном интервале теми лицами (x), кто умер в этом возрастном интервале.

Точно так же произведение

$$ {}_nL_x = l_x E[\overline{T}(x) \mid X > x] $$

общего ожидаемого числа лиц из группы (l_0), доживших до возраста x, на общую ожидаемую продолжительность жизни в возрастном интервале $(x, x+n]$ для лица (x) (не обязательно умершего в этом интервале) дает общее ожидаемое число лет, прожитых в указанном интервале дожившими до возраста x лицами из исходной (l_0)-совокупности.

Итак, заявленное выше определение ${}_nL_x$ и комментарий к формуле (14.1) получили обоснование, покоящееся на привычном для нас фундаменте условного математического ожидания.

б) *Безусловное задание.*

Запись ${}_nL_x$ в терминах безусловного распределения сл. в. $T(x)$ позволяет высказать предположение о том, что

$$ \int_0^n t l_{x+t} \mu(x+t) dt = l_0 E[T(x)I] \quad \text{и} \quad {}_nL_x = l_0 E[\overline{T}(x)] \qquad (14.2) $$

Докажем эти соотношения. Из формулы (11.1) имеем

$$ E[\overline{T}(x)] = E[T(x)I] + ns(x+n). $$

В силу (14.1) отсюда ясно, что второе соотношение (14.2) следует из первого.

Чтобы вычислить $E[T(x)I]$, нам нужно выяснить, какой вид имеет функция распределения $F_{T(x)I}(t) = P[T(x)I \le t]$. Для этого поступим аналогично тому, как это было сделано в п. 4) раздела 11. Оставляя детали в качестве упражнения читателю, в итоге получаем

$$F_{T(x)I}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - F_{T(x)}(n) + F_{T(x)}(t), & 0 \le t \le n, \\ 1, & t > n, \end{cases}$$

Отсюда дифференцированием получаем равенства $f_{T(x)I}(t) = f_{T(x)}(t)$ при $0 < t < n$ и $f_{T(x)I}(t) = 0$ при $t < 0$ и $t > n$. Поэтому

$$E[T(x)I] = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_{T(x)I}(t)dt = \int_{0}^{n} t\, f_{T(x)}(t)dt\,, \tag{14.3}$$

откуда в силу п. 5) раздела 13 и следует первое, решающее соотношение из (14.2).

Упражнения. 1. Приводят ли истолкования соотношений (14.2) как ожидаемых лет к исходному определению величины ${}_nL_x$ и исходной расшифровке формулы (14.1)? Какой подход представляется предпочтительным – а) условный или б) безусловный? Если один из подходов предпочтительнее, то в чем ценность другого?

2. Проведите вычисление математического ожидания $E[T(x)I]$ аналогично тому, как это было сделано в п. 4) раздела 11. Указание: введите множество $B_t = \{\omega \in \Omega : T(x)I \le t\}$ и вычислите вероятность $P(B_t)$ при $t < 0$, $t = 0$, $0 < t \le n$ и $t > n$.

3. Рассмотрите упражнения 4 – 9 раздела 11 и попытайтесь переформулировать их в контексте вывода соотношения (14.3). Сверхзадача: выявить оптимальный способ доказательства формулы (14.3).

4. Проведенный анализ определения ${}_nL_x$ устанавливает справедливость формулы $E[W] = E[W \mid X > x] \cdot P(X > x)$, когда $W = \overline{T}(x)$ и $W = T(x)I$. Справедлива ли эта формула в общем случае?

5. В разделе 12 величина l_x определена как $l_x := E[\mathcal{L}(x)]$. Тогда ${}_nL_x$ можно записать в виде ${}_nL_x = E[\mathcal{L}(x)]\cdot E[\overline{T}(x) \mid X > x]$. Что можно сказать о величине $E[\mathcal{L}(x)\cdot \overline{T}(x) \mid X > x]$?

Вернемся к формуле (14.1) и заметим, что ее можно продолжить с помощью интегрирования по частям:

$$ {}_nL_x = -\int_0^n t\,dl_{x+t} + nl_{x+n} = -tl_{x+t}\Big|_0^n + \int_0^n l_{x+t}dt + nl_{x+n} = \int_0^n l_{x+t}dt\,. $$

Тем самым получается l_x-аналог п. (a) предложения 11.2, более того – у нас уже сложилась сквозная тема, связанная с интегрированием по частям величин типа времен дожития и восходящая к «временам» предложения 10.1.

Функция ${}_nL_x$ используется также в определении *повозрастного коэффициента смертности* ${}_nm_x$ в интервале между x и $x+n$:

$$ {}_nm_x = \frac{\int_0^n l_{x+t}\mu(x+t)dt}{\int_0^n l_{x+t}dt} = \frac{l_x - l_{x+n}}{{}_nL_x}\,. $$

О коэффициенте ${}_nm_x$ говорят и как о наблюдавшемся в группе (l_0) на интервале $(x, x+n)$; см. [Биг-Баг], с. 79.

Замечания. 1. В соответствии с актуарной традицией

$$ L_x := {}_1L_x\,,\;\; m_x := {}_1m_x\,. $$

2. Выше в связи с определением ${}_nm_x$ было отмечено, что под возрастным интервалом между x и $x+n$ в [Биг-Баг] понимается интервал $(x, x+n)$, в то время как ранее в качестве такого интервала мы использовали полуинтервал $(x, x+n]$. Принадлежат ли возрастному интервалу его концевые точки или хотя бы одна из них – вопрос непринципиальный по крайней мере с точки зрения интегрирования (ср. упр. 8 в разделе 11). То есть пока мы имеем дело со случайными величинами непрерывного типа.

Однако с формальной точки зрения правильным будет выбор $(x, x+n]$, ибо, как следует из формул раздела 9, вероятность того, что (0) умрет в возрасте между x и $x+n$ лет, равна $P(x < X \le x+n) = P(X \in (x, x+n])$.

Такой подход основан на базовом соглашении (раздел 1) о том, что под вероятностью лицу (0) дожить до возраста x понимается $P(X > x)$. При таком соглашении дожитие до возраста x означает для (0) прожить еще какое-то время по достижении своего x-го дня рождения. Обе отмеченные в разделе 1 возможности – $P(X > x)$ и $P(X \ge x)$ – абсолютно равноправны, и выбор любой из них в качестве функции дожития – это скорее дело традиции, а не аргументации.

Функция T_x

Мы выяснили, что по ближайшем рассмотрении величина ${}_nL_x$ оказывается l_x-аналогом функции $\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|}$. Подобная аналогия имеет место и для функции $\overset{\circ}{e}_x$: на этом пути возникает величина T_x – *общее ожидаемое число лет, прожитых после достижения возраста x лицами, дожившими до этого возраста, из исходной группы* (l_0).

Имеем [Биг-Баг], с. 97,

$$T_x = \int_0^\infty t l_{x+t} \mu(x+t) dt = -\int_0^\infty t dl_{x+t} = \int_0^\infty l_{x+t} dt. \qquad (14.4)$$

Как и выше в ситуации с ${}_nL_x$, можно представить T_x в виде

$$T_x = l_x E[T(x) \mid X > x] = l_x \cdot \overset{\circ}{e}_x$$

или

$$T_x = l_0 E[T(x)],$$

В силу первого из этих соотношений корректность преобразований в (14.4) фактически удостоверяется предложением 11.1.

Упражнения. 6. Какую формулу раздела 13 использует преобразование исходного выражения ${}_nL_x$ с помощью интегрирования по частям? Данное преобразование по существу уже использовалось в главе I. Где именно, и как это связано с нынешним случаем?

7. Как получается второе равенство в определении ${}_nm_x$?

8. Почему с точки зрения интегрирования включать или не включать в возрастной интервал одну или обе его концевые точки – вопрос непринципиальный?

9. Выбор в качестве возрастного интервала между x и $x+n$ промежутков $(x, x+n]$ или $[x, x+n)$ связан, соответственно, с выбором в качестве функции дожития вероятности $P(X > x)$ или $P(X \geq x)$. А чем можно мотивировать выбор промежутка $(x, x+n)$ или $[x, x+n]$?

10. Восстановите по (14.4) представления для T_x в терминах условного и безусловного математического ожидания, так, как это было проделано выше с ${}_nL_x$. Приводит ли истолкование каждого из получившихся представлений к исходному определению величины T_x?

Итак, «дедуктивный метод Холмса» привел нас к двум представлениям для каждой из двух величин ${}_nL_x$ и T_x. А коль скоро классический детективный метод на любой «сцене» порождает свою драматургию, то и на этих страницах навсегда останется свой «знак четырех»...

Свойства функции T_x

1) $T_x = \lim\limits_{n\to\infty} {}_nL_x$

– разумеется, при условии, что T_x существует. Это означает, что несобственный интеграл в (14.2), определяющий T_x, сходится.

2) $T_x - T_{x+n} = {}_nL_x$.

3) $T_x = \sum_{k=0}^{\infty} L_{x+k}$.

Первые два свойства отправим в упражнения ниже, третье докажем. Справедливо

Предложение 14.1. *Пусть функция дожития* $s(t)$ *непрерывно дифференцируема на луче* $[0,+\infty)$, *и пусть* $x\in[0,+\infty)$ *произвольно. Если величина* T_x *существует, то имеет место равенство*

$$T_x = \sum_{k=0}^{\infty} L_{x+k} \; .$$

Доказательство следует из того, что при $k=0,1,\ldots$ будет $L_{x+k} = {}_1L_{x+k} = \int_0^1 l_{x+t+k}dt = \int_k^{k+1} l_{x+t}dt$, а $T_x = \int_0^{\infty} l_{x+t}dt$.

В двух следующих колонках резюмируем некоторые аналогии, установленные выше.

(x)	(l_0)
$\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}\rceil} = \int_0^n t\,{}_tp_x\mu(x+t)dt + n\,{}_np_x = \int_0^n {}_tp_x dt$	${}_nL_x = \int_0^n tl_{x+t}\mu(x+t)dt + nl_{x+n} = \int_0^n l_{x+t}dt$
$\overset{\circ}{e}_x = \int_0^{\infty} t\,{}_tp_x\mu(x+t)dt \qquad = \int_0^{\infty} {}_tp_x dt$	$T_x = \int_0^{\infty} tl_{x+t}\mu(x+t)dt \qquad = \int_0^{\infty} l_{x+t}dt$
$\overset{\circ}{e}_x = \lim\limits_{n\to\infty} \overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}\rceil}$	$T_x = \lim\limits_{n\to\infty} {}_nL_x$
$\overset{\circ}{e}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \overset{\circ}{e}_{(x+k):\overline{1}\rceil}$	$T_x = \sum_{k=0}^{\infty} L_{x+k}$
${}_nm_x = \dfrac{l_x - l_{x+n}}{{}_nL_x}$	${}_{\infty}m_x = \dfrac{l_x}{T_x} = 1/\overset{\circ}{e}_x$

Все-таки симметрия – полезная вещь! Благодаря симметрии, порождаемой аналогиями, обнаружились два новых соотношения (см. ниже упр. 16 и 17).

Упражнения. 11. Покажите, каким образом корректность (14.4) устанавливается на основе предложения 11.1. Какова при этом роль непрерывной дифференцируемости функции дожития?

12. Докажите свойство 1) функции T_x. Указание: упражнение 10 к разделу 11.

13. Проведите обоснование свойства 2) функции T_x. При каком условии на T_x это возможно?

14. Из свойств 1) и 2) функции T_x следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} T_{x+n} = 0$. Это равносильно сходимости $\lim\limits_{x\to\infty} T_x = 0$ (докажите!). Можно ли установить последнее соотношение непосредственно?

15. Убедитесь в том, что ${}_nL_x / l_x = \int_0^\infty {}_{t|n}q_x dt$. Исходя из первого свойства функции T_x и равенства ${}_nL_x / l_x = \int_0^n {}_n p_x dt$, можно высказать предположение о том, что $\lim\limits_{n\to\infty} {}_{t|n}q_x = {}_t p_x$. Верно ли это предположение?

16. Как получается равенство $\overset{\circ}{e}_x = \sum_{k=0}^\infty \overset{\circ}{e}_{(x+k):\overline{1}|}$?

17. Как определяется величина ${}_\infty m_x$? Докажите равенство для этой величины в последней строке колонки (l_0) выше.

15. Пример таблицы смертности населения

... Работа Абадонны безукоризненна.

– Я не хотела бы быть на той стороне, против которой этот Абадонна, – сказала Маргарита, – на чьей он стороне?

– Чем дальше говорю с вами, – любезно отозвался Воланд, – тем больше убеждаюсь в том, что вы очень умны. Я успокою вас. Он на редкость беспристрастен и равно сочувствует обеим сражающимся сторонам. Вследствие этого и результаты для обеих сторон бывают всегда одинаковы. Абадонна, – негромко позвал Воланд, и тут из стены появилась фигура какого-то худого человека в темных очках. Эти очки почему-то произвели на Маргариту такое сильное впечатление, что она, тихонько вскрикнув, уткнулась лицом в ногу Воланда. – Да перестаньте, – крикнул Воланд, – до чего нервозны современные люди. – Он с размаху шлепнул Маргариту по спине, так что по ее телу прошел звон. – Ведь видите же, что он в очках. Кроме того, никогда не было случая, да и не будет, чтобы Абадонна появился перед кем-нибудь преждевременно. Да и, наконец, я здесь! Вы у меня в гостях! Я просто хотел вам показать.

Абадонна стоял неподвижно.

– А можно, чтобы он снял очки на секунду? – спросила Маргарита, прижимаясь к Воланду и вздрагивая, но уже от любопытства.

– А вот этого нельзя, – серьезно ответил Воланд и махнул рукой Абадонне, и того не стало. – Что ты хочешь сказать, Азазелло?..[22]

---

[22] *Михаил Булгаков*. Мастер и Маргарита. Цит. по [Бул], с. 622.

Таблица смертности населения: США, 1979–1981

[Биг-Баг], с. 71 - 73

Таблица 4

$(x, x+1]$	${}_1q_x$	l_x	${}_1d_x$	L_x	T_x	$\overset{\circ}{e}_x$
0 – 1	0,01260	100 000	1260	98 973	7 387 758	73,88
1 – 2	0,00093	98 740	92	98 694	7 288 785	73,82
2 – 3	0,00065	98 648	64	98 617	7 190 091	72,89
3 – 4	0,00050	98 584	49	98 560	7 091 474	71,93
4 – 5	0,00040	98 535	40	98 515	6 992 914	70,97
5 – 6	0,00037	98 495	36	98 477	6 894 399	70,00
6 – 7	0,00033	98 459	33	98 442	6 795 922	69,02
7 – 8	0,00030	98 426	30	98 412	6 697 480	68,05
8 – 9	0,00027	98 396	26	98 383	6 599 068	67,07
9–10	0,00023	98 370	23	98 358	6 500 685	66,08
10–11	0,00020	98 347	19	98 338	6 402 327	65,10
11–12	0,00019	98 328	19	98 319	6 303 989	64,11
12–13	0,00025	98 309	24	98 297	6 205 670	63,12
13–14	0,00037	98 285	37	98 266	6 107 373	62,14
14–15	0,00053	98 248	52	98 222	6 009 107	61,16
15–16	0,00069	98 196	67	98 163	5 910 885	60,19
16–17	0,00083	98 129	82	98 087	5 812 722	59,24
17–18	0,00095	98 047	94	98 000	5 714 635	58,28
18–19	0,00105	97 953	102	97 902	5 616 635	57,34
19–20	0,00112	97 851	110	97 796	5 518 733	56,40
20–21	0,00120	97 741	118	97 682	5 420 937	55,46
21–22	0,00127	97 623	124	97 561	5 323 255	54,53
22–23	0,00132	97 499	129	97 435	5 225 694	53,60
23–24	0,00134	97 370	130	97 306	5 128 259	52,67
24–25	0,00133	97 240	130	97 175	5 030 953	51,74
25–26	0,00132	97 110	128	97 046	4 933 778	50,81
26–27	0,00131	96 982	126	96 919	4 836 732	49,87
27–28	0,00130	96 856	126	96 793	4 739 813	48,94
28–29	0,00130	96 730	126	96 667	4 643 020	48,00
29–30	0,00131	96 604	127	96 541	4 546 353	47,06
30–31	0,00133	96 477	127	96 414	4 449 812	46,12
31–32	0,00134	96 350	130	96 284	4 353 398	45,18
32–33	0,00137	96 220	132	96 155	4 257 114	44,24
33–34	0,00142	96 088	137	96 019	4 160 959	43,30
34–35	0,00150	95 951	143	95 880	4 064 940	42,36
35–36	0,00159	95 808	153	95 731	3 969 060	41,43
36–37	0,00170	95 655	163	95 574	3 837 329	40,49

37–38	0,00183	95 492	175	95 404	3 777 755	39,56
38–39	0,00197	95 317	188	95 224	3 682 351	38,63
39–40	0,00213	95 129	203	95 027	3 587 127	37,71
40–41	0,00232	94 926	220	94 817	3 492 100	36,79
41–42	0,00254	94 706	241	94 585	3 397 283	35,87
42–43	0,00279	94 465	264	94 334	3 302 698	34,96
43–44	0,00306	94 201	288	94 057	3 208 364	34,06
44–45	0,00335	93 913	314	93 756	3 114 307	33,16
45–46	0,00366	93 599	343	93 427	3 020 551	32,27
46–47	0,00401	93 256	374	93 069	2 927 124	31,39
47–48	0,00442	92 882	410	92 677	2 834 055	30,51
48–49	0,00488	92 472	451	92 246	2 741 378	29,65
49–50	0,00538	92 021	495	91 773	2 649 132	28,79
50–51	0,00589	91 526	540	91 256	2 557 359	27,94
51–52	0,00642	90 986	584	90 695	2 466 103	27,10
52–53	0,00699	90 402	631	90 086	2 375 408	26,28
53–54	0,00761	89 771	684	89 430	2 285 322	25,46
54–55	0,00830	89 087	739	88 717	2 195 892	24,65
55–56	0,00902	88 348	797	87 950	2 107 175	23,85
56–57	0,00978	87 551	856	87 122	2 019 225	23,06
57–58	0,01059	86 695	919	86 236	1 932 103	22,29
58–59	0,01151	85 776	987	85 283	1 845 867	21,52
59–60	0,01254	84 789	1 063	84 258	1 760 584	20,76
60–61	0,01368	83 726	1 145	83 153	1 676 326	20,02
61–62	0,01493	82 581	1 233	81 965	1 593 173	19,29
62–63	0,01628	81 348	1 324	80 686	1 511 208	18,58
63–64	0,01767	80 024	1 415	79 316	1 430 522	17,88
64–65	0,01911	78 609	1 502	77 859	1 351 206	17,19
65–66	0,02059	77 107	1 587	76 314	1 273 347	16,51
66–67	0,02216	75 520	1 674	74 683	1 197 033	15,85
67–68	0,02389	73 846	1 764	72 964	1 122 350	15,20
68–69	0,02585	72 082	1 864	71 150	1 049 386	14,56
69–70	0,02806	70 218	1 970	69 233	978 236	13,93
70–71	0,03052	68 248	2 083	67 206	909 003	13,32
71–72	0,03315	66 165	2 193	65 069	841 797	12,72
72–73	0,03593	63 972	2 299	62 823	776 728	12,14
73–74	0,03882	61 673	2 394	60 476	713 905	11,58
74–75	0,04184	59 279	2 480	58 039	653 429	11,02
75–76	0,04507	56 799	2 560	55 520	595 390	10,48
76–77	0,04867	54 239	2 640	52 919	539 870	9,95
77–78	0,05274	51 599	2 721	50 238	486 951	9,44
78–79	0,05742	48 878	2 807	47 475	436 713	8,93

79–80	0,06277	46 071	2 891	44 626	389 238	8,45
80–81	0,06882	43 180	2 972	41 694	344 612	7,98
81–82	0,07552	40 208	3 036	38 689	302 918	7,53
82–83	0,08278	37 172	3 077	35 634	264 229	7,11
83–84	0,09041	34 095	3 083	32 553	228 595	6,70
84–85	0,09842	31 012	3 052	29 486	196 042	6,32
85–86	0,10725	27 960	2 999	26 461	166 556	5,96
86–87	0,11712	24 961	2 932	23 500	140 095	5,61
87–88	0,12717	22 038	2 803	20 636	116 595	5,29
88–89	0,13708	19 235	2 637	17 917	95 959	4,99
89–90	0,14728	16 598	2 444	15 376	78 042	4,70
90–91	0,15868	14 154	2 246	13 031	62 666	4,43
91–92	0,17169	11 908	2 045	10 886	49 635	4,17
92–93	0,18570	9 863	1 831	8 948	38 749	3,93
93–94	0,20023	8 032	1 608	7 228	29 801	3,71
94–95	0,21495	6 424	1 381	5 733	22 573	3,51
95–96	0,22976	5 043	1 159	4 463	16 840	3,34
96–97	0,24338	3 884	945	3 412	12 377	3,19
97–98	0,25637	2 939	754	2 562	8 965	3,05
98–99	0,26868	2 185	587	1 892	6 403	2,93
99–100	0,28030	1 598	448	1 374	4 511	2,82
100–101	0,29120	1 150	335	983	3 137	2,73
101–102	0,30139	815	245	692	2 154	2,64
102–103	0,31089	570	177	481	1 462	2,57
103–104	0,31970	393	126	330	981	2,50
104–105	0,32786	267	88	223	651	2,44
105–106	0,33539	179	60	150	428	2,38
106–107	0,34233	119	41	99	278	2,33
107–108	0,34870	78	27	64	179	2,29
108–109	0,35453	51	18	42	115	2,24
109 –110	0,35988	33	12	27	73	2,20

Комментарии

1. Для математика самое главное в подобной таблице – выделить минимум данных, из которых можно вывести все остальные. В этом аспекте ключевыми представляются вторая, третья и четвертая колонки. Описываемый таблицей итерационный процесс может быть запущен последовательностью $q_x,\ x = 0,1,2,\ldots$, долей умерших в соответствующих возрастных интервалах. Выбирая *корень таблицы смертности*

$l_0 = 100000$, мы на x-м шаге вычисляем число умерших $d_x = l_x q_x$ в течение интервала $(x, x+1]$ и «новый корень» – число $l_{x+1} = l_x - d_x$ доживших до начала следующего возрастного интервала.

2. Можно интерпретировать указанный процесс как ветвящийся, а можно моделировать его как (случайный) граф специального вида. Однако следует упомянуть и о детерминистической, т.е. не вероятностной интерпретации таблицы смертности, когда группа (l_0) понимается не как совокупность случайного дожития, а *совокупность детерминированного дожития,* или *когорта.* Последняя характеризуется следующими признаками [Биг-Баг], с. 76.

(а) Изначально она состоит из l_0 лиц возраста 0.

(б) Для членов совокупности в любом возрасте действуют фактические годовые коэффициенты смертности (выбытия) – величины q_x в таблице смертности.

(в) Совокупность является замкнутой. В нее не может входить никто, кроме тех l_0 лиц, которые находились в ней в самом начале. Выход из этой совокупности обусловлен указанными выше коэффициентами смертности и только ими.

Из приведенных характеристик следует, что для числа l_x лиц, доживших до возраста x в совокупности дожития, справедливы соотношения

$$l_x = l_{x-1}(1 - q_{x-1}) = l_{x-1} - d_{x-1} = l_0 - \sum_{y=0}^{x-1} d_y =$$

$$= l_0 \left(1 - \frac{1}{l_0} \sum_{y=0}^{x-1} d_y \right) = l_0 (1 - {}_x q_0), \; x \geq 1,$$

или

$$l_x = l_{x-1} p_{x-1} = l_0 \prod_{y=0}^{x-1} p_y = l_0 \, {}_x p_0, \; x \geq 1.$$

3. До каких же пор идет суммирование или умножение в приведенных соотношениях? Наличие такого крайнего срока, разумеется, в большей степени напрашивается при детерминистическом подходе, хотя существование Агасфера пока еще никто не опроверг. Посмотрим, как решалась эта «проблема» в начале и в конце XX века.

«Заметим здесь, что таблицы чисел q_x иногда ограничиваются некоторым возрастом, после которого наблюдения или совсем не производились, или производились в столь незначительном числе, что на основании их не признавалось возможным вычислять соответствующие вероятности. Обыкновенно, однако, таблицы продолжаются до так называемого *предельного возраста* ω, который характеризуется следующими условиями

$$q_{\omega} = 1,\ p_{\omega} = 0, \tag{15.1}$$

т.е. вероятность лицу возраста ω умереть в течение следующего года жизни признается за достоверность, и дожитие его до возраста $\omega + 1$ считается невозможным» [Сав], с. 135.

Из соотношений (15.1) следует, что

$$l_{\omega} = d_{\omega} > 0 \quad \text{и} \quad l_{\omega+1} = l_{\omega} - d_{\omega} = 0.$$

Далее, «известно мало случаев, когда смерть наступает в возрасте свыше 110 лет. Поэтому часто предполагается, что существует такой возраст ω, что

$$s(x) > 0 \text{ для } x < \omega \quad \text{и} \quad s(x) = 0 \text{ для } x \geq \omega. \tag{15.2}$$

Если существование такого возраста предполагается, то он называется *предельным возрастом.* Для приведенной таблицы предельный возраст не определен. Очевидно, имеется положительная вероятность дожить до 110 лет, но таблица не содержит указаний на возраст ω». [Биг-Баг], с. 73-74.

Из соотношений (15.2) следует, что

$$l_{\omega-1} > 0 \quad \text{и} \quad l_{\omega} = 0.$$

«И дольше века длится день». Наблюдение, что за целый век обозначение возраста для последнего ненулевого числа доживших уменьшилось на единицу, разумеется, выглядит несколько курьезно, но в практическом плане это единственное, что здесь нужно «намотать на ус». Впрочем, придерживаться мы будем формул (15.2).

4. Вернемся к вопросу из п. 1 о выводимости табличных параметров. Как мы помним из раздела 14, величины $\overset{\circ}{e}_x$ и T_x связаны соотноше-

нием $\overset{\circ}{e}_x = T_x / l_x$, а для определения T_x можно запустить итеративный процесс $T_{x+1} = T_x - L_x$, $x = 0,1,2,\ldots$. Но тогда нам остается выяснить, откуда берутся значения L_x, прежде всего начальное значение L_0, а также начальное значение T_0.

Обсудим приближение

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t} dt \approx \frac{l_x + l_{x+1}}{2}. \tag{15.3}$$

Как отмечено в примере 3.5.1 из [Биг-Баг], с. 80, данное соотношение можно обосновать, приближая интеграл в (15.3) с помощью формулы трапеций. Такая возможность удостоверяется пунктом 323 из [Фихт-II], с. 156-157, а также смутными воспоминаниями составителя о прослушанных когда-то лекциях по методам вычислений.

В задаче 3.22 (b) из [Биг-Баг], с. 93, указано, что аппроксимация в (15.3) не применяется для расчета L_0 в таблице 4, но применяется для расчета L_1. Действительно,

$$\frac{l_0 + l_1}{2} = \frac{100000 + 98740}{2} = 99370, \text{ но } L_0 = 98973,$$

$$\frac{l_1 + l_2}{2} = \frac{98740 + 98648}{2} = 98694 = L_1.$$

Продолжим еще немного:

$(l_2 + l_3)/2 = 98616$, $L_2 = 98617$ – близко,
$(l_3 + l_4)/2 = 98559{,}5 \approx 98560 = L_3$ – почти,
$(l_4 + l_5)/2 = 98515 = L_4$,
$(l_5 + l_6)/2 = 98477 = L_5$.

Посмотрим «двадцатые годы»:

$(l_{25} + l_{26})/2 = 97046 = L_{25}$.

Теперь «пятидесятые»:

$(l_{56} + l_{57})/2 = 87123$, $L_{56} = 87122$ – близко,

$(l_{57}+l_{58})/2=86235{,}5\approx 86236=L_{57}$ – почти.

И «семидесятые»:

$(l_{74}+l_{75})/2=58039=L_{74}$,
$(l_{75}+l_{76})/2=55519$, $L_{75}=55520$ – близко.

Ну, и почти в самом конце таблицы:

$(l_{95}+l_{96})/2=4463{,}5$, $L_{95}=4463$ – близко,
$(l_{108}+l_{109})/2=42=L_{108}$.

Упражнение. Проверьте формулу трапеций (15.3) для всех оставшихся x из таблицы 4.

Итак, мы убедили себя (и, надеемся, читателя) в том, что можем вычислить все функции L_x за исключением L_0. Таким образом, наряду с q_x величины L_0 и T_0 можно охарактеризовать как переменные, *экзогенные* по отношению к нашим внутритабличным выводимостям.

Для определения L_0 нужны наблюдения за лицами (0) в течение первого года жизни. Что же касается величины T_0, то она имеет поистине вселенский характер и отражает всю «биомассу» нашего (l_0)-дерева. Для ее вычисления нужны годовые измерения по всем возрастам, формирующие дерево гипотетического поколения, проживающего в рамках таблицы 4 (см. заключительный пункт настоящего раздела).

Чтобы хотя бы приблизительно оценить величину T_0 частичной суммой ряда $T_0=\sum_{k=0}^{\infty}L_k$ с известным L_0, нужно удлинять таблицу 4, что без «вброса» новых значений q_x сделать невозможно. Самое последнее T_x, выводимое из таблицы 4, есть $T_{110}=T_{109}-L_{109}=46$, значит, приближение $T_0\approx L_0+L_1+\ldots+L_{109}$ заведомо не годится.

Упражнение. Как получается формула $T_0=\sum_{k=0}^{n}L_k+T_{n+1}$?

Приведем несколько заданий из [Биг-Баг].

Задания. 1. (Пример 3.3.1.) Используя таблицу 4, вычислить вероятность того, что лицо (20)

(a) доживет до возраста 100,

(b) умрет, не доживя до 70 лет,

(c) умрет в десятой декаде своей жизни.

Решение.

(a) $\dfrac{s(100)}{s(20)} = \dfrac{l_{100}}{l_{20}} = \dfrac{1150}{97741} = 0,01176578917 \approx 0,0118$.

(b) $\dfrac{s(20)-s(70)}{s(20)} = 1 - \dfrac{l_{70}}{l_{20}} = 1 - \dfrac{68248}{97741} = 0,30174645236 \approx 0,3017$.

(c) $\dfrac{s(90)-s(100)}{s(20)} = \dfrac{l_{90}-l_{100}}{l_{20}} = \dfrac{14154-1150}{97741} \approx 0,1330$.

2. (Задача 3.12.) На основе таблицы 4

(a) сравните величины ${}_5q_0$ и ${}_5q_5$,

(b) вычислите вероятность того, что лицо (25) умрет между возрастами 80 и 85.

Решение. (a) Имеем ${}_5q_0 = 1 - \dfrac{s(5)}{s(0)} = 1 - \dfrac{l_5}{l_0} = 1 - \dfrac{98495}{100000} = 0,01505$,

$${}_5q_0 = 1 - \frac{s(10)}{s(5)} = 1 - \frac{l_{10}}{l_5} = 1 - \frac{98347}{98495} = 0,00150261435 \approx 0,001503.$$

Отсюда следует, что ${}_5q_0 > 10 \cdot {}_5q_5$.

(b) Мы ищем вероятность того, что лицо (25) проживет 55 лет и умрет в течение последних 5 лет, т.е.

$${}_{55|5}q_{25} = \frac{s(80)-s(85)}{s(25)} = \frac{l_{80}-l_{85}}{l_{25}} = \frac{43180-27960}{97110} \approx 0,156729.$$

3. (Задача 3.10.) В предположении, что продолжительности предстоящей жизни 10 лиц в совокупности дожития независимы и определены согласно таблице 4, найдите для сл. в. $\mathcal{L}(65)$ функцию вероятностей, среднее и дисперсию.

Решение. Представим задачу в контексте раздела 12 (см. предложение 12.1). Получится так. Вычисляя $s(65)$ из таблицы 4, для случайной величины $\mathcal{L}(65)=\sum_{j=1}^{10} I_j$ определить функцию распределения, среднее и дисперсию при условии взаимной независимости индикаторов I_j.

Из таблицы 4 находим $l_{65}=77107$, откуда

$$s(65)=\frac{l_{65}}{l_0}=0,77107 \quad \text{и} \quad 1-s(65)=0,22893.$$

Из предложения 12.1 следует, что сл. в. $\mathcal{L}(65)$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n=10$ и $p=0,77107$. Тогда (см. [Фе-I], с. 165, 238 и 243)

$$P[\mathcal{L}(65)=k]=C_{10}^{k}(0,77107)^{k}(0,22893)^{10-k},$$
$$E[\mathcal{L}(65)]=np=7,7107$$

и

$$D[\mathcal{L}(65)]=np(1-p)=7,7107\cdot 0,22893=1,765210551\approx 1,765211.$$

5. В заключение раздела приведем еще несколько замечаний, касающихся таблицы 4.

Изменения по сравнению с оригиналом имеются только в начале приведенной таблицы: исключена разбивка на первом году жизни – так что значение t в табулируемых функциях ${}_t q_x$ и ${}_t d_x$ сразу берется равным 1. Кроме того, в заголовках столбцов оставлены только буквенные обозначения соответствующих характеристик. Формирование таблицы можно прокомментировать следующим образом.

«Эта таблица создавалась не на основе наблюдений за 100 000 новорожденными вплоть до смерти последнего из них. Она была основана на оценках вероятностей смерти при условии дожития до различных возрастов, полученных из данных о народонаселении США в годы, близкие к 1980-му году, году переписи населения. Используя понятие совокупности случайного дожития, мы должны сделать предположение, что вероятности, полученные на основе этой таблицы, будут соответствовать продолжительности жизни тех, кто принадлежит к этой совокупности дожития». [Биг-Баг], с. 70, 73.

Самое интересное, что и 20-летний, и 70-летний человек могут считать одну и ту же (скажем, приведенную) таблицу смертности, отражающей динамику именно их (l_0)-совокупностей, хотя рождение соответствующих реальных поколений разделяет целые полвека. Вот, как говорит об этом отечественная статистическая традиция:

«Расчет таблицы смертности (ТС) для *реального* поколения (продольный анализ) возможен, когда жизнь поколения закончена. Поэтому более распространены ТС календарного периода – так называемые ТС для *гипотетического* поколения (поперечный анализ), т.е. для некоторой совокупности родившихся, *как бы* проживающих свою жизнь в условиях возрастных интенсивностей смертности рассматриваемого календарного периода» [СтаС], с. 516.

Однако намечающийся разговор о расслоении данных по статистикам и формировании из них модели поколения нам придется свернуть. Рамки настоящего пособия довольно узкие, и реалиям, лежащим в основе таблиц смертности (как и возникающим в результате их применения) суждено «остаться за сценой». Наша первоочередная задача – встроить приведенный выше дискретный объект под названием «таблица смертности» в систему непрерывных представлений, развиваемых в данной книге. А для этого понадобится интерполяция.

16. Интерполяции для дробных возрастов

– Подымите мне веки: не вижу! – сказал подземным голосом Вий – и все сонмище кинулось подымать ему веки[23].

В таблице смертности все величины определены только при целых натуральных значениях переменных. Чтобы доопределить указанные величины для *всех* вещественных положительных значений переменной, нам потребуется уметь восстанавливать эти величины на интервалах между соседними целыми точками, т.е. заниматься интерполяцией.

В [МЭ], т. 2, с. 617, *интерполирование,* или *интерполяция*, определяется как «конструктивное восстановление (быть может, приближенное) функции определенного класса по известным ее значениям или значениям ее производных в данных точках».

Если функция дожития $s(x)$ задана в точках $x = 0,1,2,\ldots$, то решить для нее задачу интерполирования (интерполяции) значит определить значения $s(x+t)$, $0<t<1$, по значениям $s(x)$ и $s(x+1)$ при всех целых $x \geq 0$.

[23] *Н.В. Гоголь*. Вий. Цит. по [Го], с. 297.

Для представления функции s на интервале $(x, x+1)$ также используется термин «интерполяция». При этом указывается характер зависимости $s(x+t)$ от t. Популярными в актуарной математике являются три вида интерполяции: линейная, показательная и гармоническая; см. [Биг-Баг], с. 82, [Фал], с. 42. Напомним, что x является целым, а $0 \le t \le 1$. Там, где придется вычислять производные, последний промежуток будет уменьшаться до $0 < t < 1$.

Итак, три карты, простите, три интерполяции.

1) Линейная интерполяция.

Определяется как выпуклая комбинация величин $s(x)$ и $s(x+1)$:

$$s(x+t) = (1-t)s(x) + ts(x+1).$$

Другое название – *равномерное распределение моментов смерти внутри каждого годичного возрастного интервала,* или просто **равномерное распределение** смертей. Последнее название используется чаще, чем исходное; ниже мы исследуем его происхождение.

2) Показательная интерполяция.

Задается как линейная интерполяция для функции $\ln s(x+t)$; имеет вид

$$\ln s(x+t) = (1-t)\ln s(x) + t\ln s(x+1).$$

3) Гармоническая интерполяция.

Вводится как линейная интерполяция для функции $1/s(x+t)$; формула:

$$1/s(x+t) = (1-t)/s(x) + t/s(x+1).$$

Другие названия: предположение о *гиперболичности,* или **предположение Бальдуччи**[24].

[24] G. Balducci. Бальдуччи – это у «Биг-Бага», у «Фал» – Балдуччи. Кроме того, что этот итальянский актуарий указал роль данной интерполяции в традиционном актуарном методе построения таблиц смертности, по-видимому, в работе Correspondence 1921 г. в Journal of the Institute of Actuaries, 52:184, о нем ничего не известно. Навеваемая этим печаль по поводу *Gloria mundi* развеивается его фамилией, звучащей весьма оптимистично на русский лад.

Напомним определяющую формулу:

$$s(x+t)=(1-t)s(x)+ts(x+1)\,,\ 0\le t\le 1.$$

Посмотрим, как будут выглядеть при этом обитатели таблицы 1. Имеем

$$F_X(x+t)=(1-t)F_X(x)+tF_X(x+1)\,,\ 0\le t\le 1,$$

откуда дифференцированием получаем

$$f_X(x+t)=F_X(x+1)-F_X(x),\ 0<t<1.$$

В концевых точках производные понимаются как односторонние, ситуация здесь не выходит за рамки замечания 113 из [Фихт-I], с. 228 (ср. предложение 8.2). Тем не менее, при введении в предмет в доступной нам актуарной литературе концевые точки исключают из области определения производной – по-видимому, чтобы не отвлекаться на «тонкости анализа». Точно так же будем иметь (см. раздел 9)

$$\mu(x+t)=-\frac{s'(x+t)}{s(x+t)}=\frac{s(x)-s(x+1)}{(1-t)s(x)+ts(x+1)}=\frac{q_x}{1-tq_x}\,,\ 0<t<1.$$

Теперь вычислим ${}_tq_x$. При $0\le t\le 1$ получаем (см. раздел 7)

$${}_tq_x=\frac{s(x)-s(x+t)}{s(x)}=\frac{s(x)-[(1-t)s(x)+ts(x+1)]}{s(x)}=\frac{t[s(x)-s(x+1)]}{s(x)}=tq_x.$$

Именно это равенство ${}_tq_x=tq_x$, или $F_{T(x)}(t\,|X>x)=tF_{T(x)}(1|X>x)$ послужило основой для идентификации линейной интерполяции как равномерного распределения смертей.

Упражнение. С использованием привычных руководств по теории вероятностей проверьте правомерность использования термина «равномерное распределение» для $F_{T(x)}(t\,|X>x)$ при $0\le t\le 1$.

Книге [Фал] (с. 43) мы обязаны указанием на справедливость следующего утверждения.

Предложение 16.1. *Пусть* $x \geq 0$ *– целое и* $0 \leq t \leq 1$. *Функция дожития на интервале* $(x, x+1)$ *задается линейной интерполяцией тогда и только тогда, когда выполняется равенство* ${}_t q_x = t q_x$.

Упражнение. Докажите предложение 16.1.

В [Биг-Баг] (с. 83) в качестве канонического вводится список из шести функций для дробных возрастов, которые затем выписываются в терминах q_x или p_x для всех трех интерполяций (см. ниже таблицу 5). Продолжая работу с линейной интерполяцией, для которой две функции из списка – ${}_t q_x$ и $\mu(x+t)$ – уже найдены, получим выражения для оставшихся четырех: ${}_{1-t} q_{x+t}$, ${}_y q_{x+t}$, ${}_t p_x$ и ${}_t p_x \mu(x+t)$.

Ясно, что ${}_t p_x = 1 - t q_x$, ${}_t p_x \mu(x+t) = q_x$, а ${}_{1-t} q_{x+t}$ – частный случай величины ${}_y q_{x+t}$, которую сейчас и вычислим.

Из результатов раздела 7 и определения линейной интерполяции имеем

$$
{}_y q_{x+t} = \frac{s(x+t) - s(x+t+y)}{s(x+t)} =
$$

$$
= \frac{[(1-t)s(x) + ts(x+1)] - [(1-t-y)s(x) + (t+y)s(x+1)]}{(1-t)s(x) + ts(x+1)} =
$$

$$
= \frac{y[s(x) - s(x+1)]}{s(x) - t[s(x) - s(x+1)]} = \frac{y q_x}{1 - t q_x};
$$

переход от предпоследнего выражения данной цепочки к последнему осуществляется с помощью деления на $s(x)$. Как следствие имеем

$$
{}_{1-t} q_{x+t} = \frac{(1-t) q_x}{1 - t q_x}.
$$

Упражнение. Покажите, что $q_{x+t} = \dfrac{q_x}{1 - t q_x}$.

Как и выше, вначале восстановим то, что в §* можно было назвать актуарным контекстом, а в разделе 8 – набором $\mathcal{A}_X(x+t)$, который теперь играет роль набора $\mathcal{A}_X(x)$ из предложения 8.1.

Определение показательной интерполяции после потенцирования преобразуем следующей цепочкой равенств:

$$s(x+t)=s(x)^{1-t}s(x+1)^t=s(x)\left(\frac{s(x+1)}{s(x)}\right)^t=s(x)p_x^t,\ 0\le t\le 1,$$

откуда сразу

$${}_tp_x=p_x^t,\ 0\le t\le 1.$$

Далее, очевидно,

$$F_X(x+t)=1-s(x)p_x^t,\ 0\le t\le 1.$$

Дифференцирование дает

$$f_X(x+t)=-s(x)p_x^t\ln p_x,\ 0<t<1,$$

и (раздел 8)

$$\mu(x+t)=\frac{f_X(x+t)}{s(x+t)}=-\ln p_x,\ 0<t<1.$$

Таким образом, доказана часть «только тогда» в следующем утверждении.

Предложение 16.2. *Пусть* $x\ge 0$ *– целое. Функция дожития на интервале* $(x,x+1)$ *допускает показательную интерполяцию тогда и только тогда, когда интенсивность смертности* $\mu(x+t)$ *постоянна на промежутке* $0<t<1$.

Докажем часть «тогда». Пусть $\mu(x+t)\equiv\mu$, $0<t<1$ (постоянная μ, вообще говоря, зависит от x). Воспользуемся формулой, полученной в разделе 4:

$$ {}_t p_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu(\sigma)d\sigma} = e^{-\mu t},\ 0 \le t \le 1. $$

По определению ${}_t p_x$ (формула (4.1)) отсюда следует, что

$$ s(x+t) = s(x)e^{-\mu t},\ 0 \le t \le 1, $$

в частности,

$$ s(x+1) = s(x)e^{-\mu}. $$

Последние две формулы обеспечивают справедливость следующей цепочки равенств:

$$ s(x)^{1-t} s(x+1)^t = s(x)^{1-t} s(x)^t e^{-\mu t} = s(x)e^{-\mu t} = s(x+t). $$

Равенство между концами этой цепочки, как мы уже видели выше, эквивалентно определению показательной интерполяции и, таким образом, предложение 16.2 полностью доказано.

Полученное утверждение устанавливает новое, более употребительное название для показательной интерполяции – *постоянная интенсивность смертности*, или просто *постоянная интенсивность*.

Упражнения. 1. Почему $\mu(x+t) \equiv \mu$ на интервале $0 < t < 1$, в то время как ${}_t p_x = e^{-\mu t}$ уже на отрезке $0 \le t \le 1$?

2. Покажите, что $p_x = e^{-\mu}$, и выведите отсюда $\mu(x+t) = -\ln p_x$ на $0 < t < 1$. Упростит ли это доказательство того, что $s(x+t)$ – показательная интерполяция?

3. Проверьте соответствующую колонку в таблице 5.

Интерполяция Бальдуччи

Вот из моря вылез старый Бес:
«Зачем ты, Балда, к нам залез?»[25]

Вначале – о терминологии. Название «гармоническая интерполяция», по-видимому, восходит к понятию гармонического среднего двух чисел. Напомним (см. [МЭ], т. 1, с. 890), что число γ называется гармо-

[25] *Пушкин А.С.* Сказка о попе и о работнике его Балде. Цит. по [Пуш], с. 297.

ническим средним чисел α и β, если его обратная величина является средним арифметическим обратных величин данных чисел, т.е.

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right).$$

Отсюда до «среднего Бальдуччи»

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{1-t}{\alpha}+\frac{t}{\beta}$$

уже, как говорится, рукой подать.

Что же касается еще одного синонима – «предположения о гиперболичности» – то своим происхождением он обязан тому, что, как отмечает «Биг-Баг», «в этом случае ${}_t p_x$ является гиперболической кривой». Что это может означать, посмотрим ниже. Мы же будем использовать название «интерполяция Бальдуччи», отдавая должное ученому, чья функция дожития навсегда скрылась в той эпохе истории Италии, которая вызывает у нас, советских людей, безотчетную брезгливость.

Теперь – ставшие уже традиционными вычисления $\mathcal{A}_X(x+t)$. Из определения интерполяции Бальдуччи имеем

$$s(x+t)=\frac{s(x)s(x+1)}{(1-t)s(x+1)+ts(x)}=\frac{s(x+1)}{p_x+tq_x}=\frac{p_x}{p_x+tq_x}s(x),\ 0\le t\le 1,$$

откуда делением на $s(x)$ получаем

$${}_t p_x=\frac{p_x}{p_x+tq_x},\ 0\le t\le 1.$$

Ясно, что график ${}_t p_x$ как функции от t представляет собой гиперболу (при $0<p_x=1-q_x<1$). Тем самым получает обоснование термин «предположение о гиперболичности». Далее,

$$F_X(x+t)=1-\frac{p_x}{p_x+tq_x}(1-F_X(x)),\ 0\le t\le 1,$$

$$f_X(x+t)=\frac{p_x q_x}{(p_x+tq_x)^2}s(x)=\frac{q_x}{(p_x+tq_x)^2}s(x+1)=$$

$$= \frac{q_x}{p_x + tq_x} s(x+t),\ 0 < t < 1,$$

$$\mu(x+t) = \frac{f_X(x+t)}{s(x+t)} = \frac{q_x}{p_x + tq_x},\ 0 < t < 1.$$

Вычисление последней колонки таблицы 5 ниже также не составит труда. Ограничимся величиной ${}_y q_{x+t}$. При $0 \le t + y \le 1$ имеем

$${}_y q_{x+t} = 1 - \frac{s(x+t+y)}{s(x+t)} = 1 - \frac{p_x + tq_x}{p_x + (t+y)q_x} = \frac{yq_x}{p_x + (t+y)q_x},\ 0 \le t \le 1.$$

Справедлив следующий аналог предложений 16.1 и 16.2.

Предложение 16.3. *Пусть* $x \ge 0$ *– целое и* $0 \le t \le 1$. *Функция дожития на интервале* $(x, x+1)$ *представима интерполяцией Бальдуччи тогда и только тогда, когда* ${}_{1-t} q_{x+t} = (1-t)q_x$.

Доказательство. Пусть к функции $s(x+t)$ приводит интерполяция Бальдуччи. Тогда, вычисляя ${}_y q_{x+t}$, как и выше, и подставляя в получившееся выражение $y = 1-t$, с учетом $p_x + q_x = 1$ будем иметь ${}_{1-t} q_{x+t} = (1-t)q_x$.

Обратно, пусть выполняется равенство ${}_{1-t} q_{x+t} = (1-t)q_x$. Записывая участвующие в нем вероятности в терминах функции дожития, после очевидных преобразований получим

$$\frac{1}{s(x+t)} = \frac{1-t}{s(x)} + \frac{t}{s(x+1)}$$

– формулу, определяющую интерполяцию Бальдуччи.

Предложение 16.3 доказано.

Как отмечено в [Фал], с. 44, равенство ${}_{1-t} q_{x+t} = (1-t)q_x$ означает, что «в предположении Бальдуччи вероятность смерти до очередного дня рождения пропорциональна времени до этого дня рождения».

А вот и долгожданная

Таблица 5

Функция	Равномерное распределение	Постоянная интенсивность	Интерполяция Бальдуччи
${}_tq_x$	tq_x	$1-p_x^t$	$\dfrac{tq_x}{1-(1-t)q_x}$
$\mu(x+t)$	$\dfrac{q_x}{1-tq_x}$	$-\ln p_x$	$\dfrac{q_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_{1-t}q_{x+t}$	$\dfrac{(1-t)q_x}{1-tq_x}$	$1-p_x^{1-t}$	$(1-t)q_x$
${}_yq_{x+t}$	$\dfrac{yq_x}{1-tq_x}$	$1-p_x^y$	$\dfrac{yq_x}{1-(1-y-t)q_x}$
${}_tp_x$	$1-tq_x$	p_x^t	$\dfrac{p_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_tp_x\ \mu(x+t)$	q_x	$-p_x^t\ln p_x$	$\dfrac{p_xq_x}{[1-(1-t)q_x]^2}$

Данная таблица приведена в [Биг-Баг], с. 83, под названием «Вероятностные функции для дробных возрастов». На «главной диагонали» стоят величины tq_x, $-\ln p_x$ и $(1-t)q_x$, участвующие в эквивалентных определениях соответствующих интерполяций. Отметим, что в последней колонке знаменатели отличаются от тех, что появлялись выше. Излишне говорить о том, что данный «стереоэффект» является естественным объектом для упражнений, которые читатель сформулирует и решит сам.

Задания ([Биг-Баг], с. 93,94).

1. (Задача 3.28.) Воспользовавшись столбцом, соответствующим l_x в таблице 4, вычислите ${}_{1/2}p_{65}$ при каждом из трех предположений таблицы 5.

Решение. Поскольку проблемы здесь только вычислительные, ответы выпишем сразу. Итак, равномерное распределение 0,989709, постоянная интенсивность 0,989656, гиперболичность 0,989602.

Все дело в том, как получать q_{65} – сразу брать из таблицы 4 или вычислять по формуле $q_{65}=d_{65}/l_{65}$, а уже d_{65} и l_{65} брать из таблицы смертности. Если «сразу», то $q_{65}=0{,}02059$, а если «по формуле», то

$$q_{65} = \frac{d_{65}}{l_{65}} = \frac{1587}{77107} = 0,02058178894.$$

Равномерное распределение. Имеем

$$_{1/2}\,p_{65} = 1 - \frac{1}{2} q_{65}.$$

Выбор $q_{65} = 0,02059$ дает $_{1/2}\,p_{65} = 0,989705$, а уточнение $q_{65} = d_{65} / l_{65}$ приводит к значению $_{1/2}\,p_{65} = 0,98970910553$. Сравнение с приведенным выше «Биг-Баговским» ответом устанавливает, что требуемое приближение дает второй способ, т.е. «по формуле».

Постоянная интенсивность. Из таблицы 5 находим

$$_{1/2}\,p_{65} = \sqrt{p_{65}} = \sqrt{1 - q_{65}}\,.$$

«Сразу»: $p_{65} = 1 - q_{65} = 0,97941$ и $_{1/2}\,p_{65} = 0,98965145$. «По формуле»: $p_{65} = 0,97941821106$ и $_{1/2}\,p_{65} = 0,9896556022475$.

Вывод тот же: с «Биг-Багом» согласуется выбор «по формуле».

Бальдуччи.

Пользуемся формулой

$$_{1/2}\,p_{65} = \frac{1 - q_{65}}{1 - q_{65} / 2}.$$

В числителе стоит подкоренное выражение из *постоянной интенсивности,* в знаменателе – ответ из *равномерного распределения.*

Первый способ приводит к значению $_{1/2}\,p_{65} = 0,98959791048$.

Второй дает величину $_{1/2}\,p_{65} = 0,98960210185$. Вывод тот же.

Если бы мы были внимательнее, то запомнили бы, что в условии задачи было предписано воспользоваться столбцом, соответствующим l_x. Это, в частности, означает, что решение методом «сразу» было излишним. А решать задачу надо было, переписывая соответствующие формулы таблицы 5 в терминах l_x. Вот как это выглядит для *равномерного распределения*.

Так как $q_x = d_x / l_x = (l_x - l_{x+1}) / l_x$, то

$$ {}_{1/2}p_{65} = \frac{l_{65} + l_{66}}{2l_{65}} = \frac{77107 + 75520}{154214} = 0{,}98970910552 \,. $$

Для остальных двух предположений таблицы 5 подобное вычисление ${}_{1/2}p_{65}$ читателю предлагается провести самому.

Нет худа без добра – мы открыли источник для новых задач!

2. (Задача 3.29.) Воспользуйтесь таблицей 4 и предположением о равномерности распределения смертей внутри каждого годичного возрастного интервала для нахождения медианы продолжительности предстоящей жизни лица

(a) возраста 0, (b) возраста 50.

Решение. (a) Как отмечено в конце раздела 10, медиана времени жизни $m = m(0)$ определяется как корень уравнения $s(m) = 1/2$. Отсюда следует $l_m = l_0 s(m) = 50000$. Из таблицы 4 усматривается, что значение l_m попадает в промежуток между $l_{77} = 51599$ и $l_{78} = 48878$. К этому промежутку и приме́ним предположение о равномерном распределении моментов смерти. Положим $m = 77 + t_m$. Тогда

$$ l_m = l_{77+t_m} = (1 - t_m) l_{77} + t_m l_{78} $$

Разрешая последнее равенство относительно t_m, получим

$$ t_m = \frac{l_{77} - 50000}{l_{77} - l_{78}} = \frac{1599}{2721} = 0{,}587651598 \approx 0{,}59 \,, $$

и медиана равна $m = 77{,}59$.

(b) Из п. 3) раздела 11 следует, что медиана продолжительности предстоящей жизни лица (50) есть корень уравнения

$$ l_{50+m} = \frac{1}{2} l_{50} = \frac{91526}{2} = 45763 \,. $$

Эта величина попадает в промежуток между значениями $l_{79} = 46071$ и $l_{80} = 43180$ из таблицы 4. Положим $50 + m = 79 + t_m$. Тогда применение линейной интерполяции дает

$$l_{50+m} = l_{79+t_m} = (1-t_m)l_{79} + t_m l_{80} = 45763,$$

откуда

$$t_m = \frac{l_{79} - 45763}{l_{79} - l_{80}} = \frac{308}{2891} = 0{,}10653753 \approx 0{,}11.$$

В результате имеем $50 + m = 79{,}11$, значит, $m = 29{,}11$.

3. (Задача 3.30.) Для $q_{70} = 0{,}04$ и $q_{71} = 0{,}05$ вычислите вероятность того, что лицо (70) умрет между возрастами 70½ и 71½ в предположении о (a) равномерности распределения смертей внутри каждого годового возраста; (b) гиперболичности для каждого годичного возрастного интервала.

Прежде, чем решать эту задачу, сделаем одно

Замечание. Напомним, что в качестве заданий мы берем задачи из [Биг-Баг], где приведены только ответы. Данная же задача разбирается в [Фал], с. 61-63. В качестве источника задачи указана книга одного из авторов пособия [Фал], вышедшая в 1996 г.[26] Первое издание трактата [Биг-Баг] вышло в 1986 г.; в списке литературы [Фал] этот источник есть. Можно высказать предположение о том, что, по крайней мере, один из авторов [Фал] почти двадцать лет назад занимался тем, чем сейчас занимаемся мы, а именно, решал задачи из книги [Биг-Баг]. Отсутствие в [Фал], с. 61-63, ссылки на данную книгу – это, по-видимому, дань традиции «лихих девяностых», когда в отечественной литературе по новым направлениям экономической мысли ссылки на источники были весьма уклончивы. Указанной традиции отдаем дань и мы: прямую ссылку на [Биг-Баг] приводим, но от прямой расшифровки источника уклоняемся.

Решение задачи 3. Согласно разделу 9, нам нужно найти значение

$$_{0,5|}q_{70} = \frac{s(70,5) - s(71,5)}{s(70)}.$$

(a) *Линейная интерполяция дает*

---

[26] *Фалин Г.И.* Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. М.: Изд-во мех.-матем. ф-та МГУ, 1996.

$$s(70,5) = (s(70) + s(71))/2 \quad \text{и} \quad s(71,5) = (s(71) + s(72))/2.$$

Тогда

$$_{0,5|}q_{70} = \frac{s(70) - s(72)}{2s(70)} = 0,5[1 - {}_2p_{70}] = 0,5[1 - p_{70}p_{71}]$$

– согласно разложению $_2p_{70}$ на «годичные дожития» из раздела 9. Так как, по условию, $p_{70} = 1 - q_{70} = 0,96$ и $p_{71} = 1 - q_{71} = 0,95$, то, окончательно,

$$_{0,5|}q_{70} = 0,5[1 - 0,96 \cdot 0,95] = 0,044.$$

(b) При *интерполяции Бальдуччи* исходим из равенства

$$s(x+t) = \frac{s(x+1)}{p_x + tq_x}, \ 0 \le t \le 1.$$

Имеем

$$s(70,5) = \frac{s(71)}{p_{70} + 0,5q_{70}} = \frac{s(71)}{0,96 + 0,5 \cdot 0,04} = \frac{s(71)}{0,98}$$

и

$$s(71,5) = \frac{s(72)}{p_{71} + 0,5q_{71}} = \frac{s(72)}{0,95 + 0,5 \cdot 0,05} = \frac{s(72)}{0,975}.$$

Искомая вероятность будет равна

$$_{0,5|}q_{70} = \frac{s(70,5) - s(71,5)}{s(70)} = \frac{1}{0,98}\frac{s(71)}{s(70)} - \frac{1}{0,975}\frac{s(72)}{s(70)} =$$

$$= \frac{1}{0,98}\,{}_1p_{70} - \frac{1}{0,975}\,{}_2p_{70} = p_{70}\left(\frac{1}{0,98} - \frac{1}{0,975}p_{71}\right) =$$

$$= 0,96\left(\frac{1}{0,98} - \frac{0,95}{0,975}\right) = 0,044207221 \approx 0,04421.$$

Вдогонку сделанному выше замечанию упомянем, что «Фал» слегка подправили исходную «Биг-Баг»овскую формулировку. Если кратко, то условие в [Фал] имеет такой вид: найти $_{0,5|}q_{70}$ в случае (b); как изменится результат, если использовать предположение (a)?

Ответ: «предположение о равномерном распределении смертей привело к незначительному уменьшению искомой вероятности».

4. (Задача 3.31.) Воспользовавшись столбцом, соответствующим l_x в таблице 4, и каждым из предположений таблицы 5, вычислите

(a) $\lim_{h\to 0-} \mu(60+h)$, (b) $\lim_{h\to 0+} \mu(60+h)$, (c) $\mu(60+1/2)$.

Эту простую задачу мы оставляем читателю как **упражнение**.

17. Таблица 4: заключительные замечания

"Gottes Zeit ist die allerbeste Zeit"
J.S. Bach

«Божий срок – самый лучший срок», – сказал Теофил Норт на прощание тете Лизелотте Мюллер. Перед ее мысленным взором сменяли друг друга ставшие уже бессчетными поколения ее воспитанников. Так молодой учитель провожал старого коллегу по дороге в Вечность, пройдя с ним несколько шагов «долиной смертной тени»...

Люди предпочитают деформировать этот срок – получается, как правило, в сторону уменьшения... Благословенно общество, в котором своими проблемами человек обязан только себе. Пока такое общество не построено, мы будем закалять свой дух составлением таблиц смертности, засекречиванием статистики и – в качестве моральной компенсации – упоением эстетикой актуарного символизма...

Мы вдруг зримо ощутили, что наше пособие «перевалило через экватор». Написано уже около сотни страниц, разобран ряд важных тем, открыты новые связи. Математическое ожидание, как, впрочем, и любое другое, продолжает вызывать безотчетную тревогу и в то же время надежду на лучшее. Благодаря Биг-Багу мы увидели красоту «исчисления смерти». Мы вдруг увидели, что историки составляют таблицы смертности эпох, экономисты – проектов, а киношники – иллюзий. Сколь много можно узнать, просто посмотрев на то, как человечество применяет к себе теорию вероятностей!..

Этика страха порождает страхование, эстетика страха порождает романтизм. Романтические произведения проникнуты близостью смерти, но создаются, в конечном счете, все-таки для юношества. Недаром мудрые предки подсовывали молодежи романы Вальтера Скотта и

Александра Дюма – может быть, именно поэтому в те времена больше верили случаю – «резерву Господа Бога»... Хотя, возможно, нам просто всего не говорили. Думаю, и настоящее пособие следует рассматривать в общем потоке академического романтизма.

Попробуем представить себе «идола страхования».

Наверное, *Пир Валтасара* слишком эсхатологичен, *Декамерон* слишком затейлив, а *Пир во время чумы* или *Седьмая печать* слишком уж мрачны при всем их оптимизме. *Орфей* все-таки скорее гротеск, хотя Ад там изображен довольно реалистично...

Вернемся к Норту.

«Как сказал Гёте: "Balde ruhest du auch"...

– В стихах он обращался к себе, поздно ночью, в башне, среди глухих лесов. Он написал их алмазом на окне. Это – последние слова самого знаменитого в немецком языке стихотворения. Ему было двадцать с чем-то лет. Отдыха он ждал до восьмидесяти трех»[27].

……………………..

I. Список величин, связанных с таблицей смертности, завершает функция $a(x)$, определяемая по формуле

$$a(x) = \frac{\int_0^1 t l_{x+t} \mu(x+t) dt}{\int_0^1 l_{x+t} \mu(x+t) dt}$$

и озвучиваемая как «среднее число лет, прожитых между возрастами x и $x+1$ теми лицами в группе доживших до возраста x, которые умирают в некоторый момент между этими возрастами» [Биг-Баг], с. 80.

Данное определение уместно сравнить с интерпретацией числителя дроби в выражении для $a(x)$. Интеграл

$$\int_0^1 t l_{x+t} \mu(x+t) dt$$

[27] *Т. Уайлдер.* Теофил Норт. Цит. по [Норт], № 6, с. 82.

равен (ожидаемому) числу лет, прожитых в возрастном интервале между x и $x+1$ теми лицами из группы (l_0), кто дожил до возраста x и умер в указанном возрастном интервале (см. раздел 14).

Из сравнения видно, что оба словесных описания очень похожи, так что их придется различать по символьному контексту. Важно понимать, что интеграл из числителя дроби $a(x)$ наследует безусловную природу L_x, а сама функция $a(x)$ представляет собой условное математическое ожидание.

Указанный интеграл вычислен в первом равенстве (14.2):

$$\int_0^1 t l_{x+t}\mu(x+t)dt = l_0 E[T(x)I],$$

где I – индикатор множества $\{\omega \in \Omega : 0 < T(x) \le 1\}$. Знаменатель дроби $a(x)$ равен (см. раздел 13)

$$\int_0^1 l_{x+t}\mu(x+t)dt = l_0 \int_0^1 f_X(x+t)dt = l_0[F_X(x+1) - F_X(x)] = l_0 P(I=1).$$

В итоге имеем

$$a(x) = \frac{E[T(x)I]}{P(I=1)} = E[T(x)I \mid I=1] =$$

$$= E[T(x) \mid I=1] = E[T(x) \mid 0 < T(x) \le 1].$$

Упражнения. 1. Как получается второе равенство в приведенной цепочке?

2. Проверьте равенство $E[T(x)I \mid I=1] = E[T(x) \mid I=1]$ в духе упражнения 7 раздела 11.

3. В [Биг-Баг], с. 80, отмечено, что «при вероятностном взгляде на таблицы смертности мы получили бы

$$a(x) = \frac{\int_0^1 t\, {}_t p_x \mu(x+t)dt}{\int_0^1 {}_t p_x \mu(x+t)dt} = E[T \mid T < 1]».$$

Как получаются эти равенства и как они согласуются с полученным выше? Работают ли здесь аналогии с упражнениями 4 – 6 из раздела 11? И, наконец, что значит «при вероятностном взгляде»? А у нас какой был?

II. Приведем некоторые соотношения с участием функции $a(x)$.

Из определений $a(x)$, L_x и п. 4) раздела 13 следует, что

$$a(x)=\frac{\int_0^1 t l_{x+t}\mu(x+t)dt}{\int_0^1 l_{x+t}\mu(x+t)dt}=\frac{L_x-l_{x+1}}{l_x-l_{x+1}},$$

откуда

$$L_x=a(x)l_x+[1-a(x)]l_{x+1}.$$

Ясно, что если $a(x)=1/2$, то мы получили бы приближение (15.3) для функции L_x по формуле трапеций. Оказывается, в случае линейной интерполяции все так и будет.

Действительно, при равномерном распределении моментов смерти внутри годичного возрастного интервала имеем ${}_t p_x\mu(x+t)=q_x$, $x\geq 0$ – целое, $0\leq t\leq 1$. Но тогда

$$a(x)=\frac{\int_0^1 t\,{}_t p_x\mu(x+t)dt}{\int_0^1 {}_t p_x\mu(x+t)dt}=\frac{\int_0^1 tdt}{\int_0^1 dt}=\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad L_x\equiv\frac{l_x+l_{x+1}}{2}.$$

Задания ([Биг-Баг], с. 94).

1. (Задача 3.32.) В предположении постоянства интенсивности смертности покажите, что

$$\text{(a) } a(x)=\frac{[(1-e^{-\mu})/\mu]-e^{-\mu}}{1-e^{-\mu}}, \ \text{(b) } a(x)\cong\frac{1}{2}-\frac{q_x}{12}.$$

Решение. (a) В разделе 16 была установлена связь $p_x=e^{-\mu}$, где $\mu\equiv\mu(x+t)$ – постоянная интенсивность смертности. Это позволяет работать не в терминах p_x, как в таблице 5, а в терминах μ. Имеем ${}_t p_x\mu(x+t)=\mu e^{-\mu t}$, поэтому

$$a(x)=\frac{\int_0^1 t\mu e^{-\mu t}dt}{\int_0^1 \mu e^{-\mu t}dt}=\frac{-\int_0^1 t de^{-\mu t}}{-\int_0^1 de^{-\mu t}}=$$

$$=\frac{-te^{-\mu t}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-\mu t}dt}{-e^{-\mu t}\Big|_0^1}=\frac{-e^{-\mu}+\dfrac{1}{\mu}(1-e^{-\mu})}{1-e^{-\mu}}.$$

(b) Речь идет о том, чтобы найти два первых члена тейлоровского разложения функции $a(x)$ по степеням q_x. Воспользуемся результатом (a). Связь $p_x=e^{-\mu}$ позволяет записать $1-e^{-\mu}=q_x$ и представить функцию $\mu=-\ln(1-q_x)$ в виде разложения по степеням q_x:

$$\mu=q_x+\frac{q_x^2}{2}+\frac{q_x^3}{3}+\ldots$$

Тогда формула из (a) дает

$$a(x)=\frac{1-e^{-\mu}-\mu e^{-\mu}}{\mu(1-e^{-\mu})}=\frac{q_x-(1-q_x)\left(q_x+\dfrac{q_x^2}{2}+\dfrac{q_x^3}{3}+\ldots\right)}{q_x\left(q_x+\dfrac{q_x^2}{2}+\ldots\right)}.$$

После очевидных преобразований, изучаемых в курсе математического анализа в I семестре, будем иметь

$$a(x)=\frac{1}{2}-\frac{q_x}{12}+\ldots,$$

что и требовалось.

Упражнение 4. Решите задание (b), не опираясь на (a), но сразу записывая функцию $a(x)$ в терминах q_x.

2. (Задача 3.33.) Если принято предположение о гиперболичности, покажите, что

(a) $a(x)=-\dfrac{p_x}{q_x^2}(q_x+\ln p_x)$, (b) $a(x)\cong\dfrac{1}{2}-\dfrac{q_x}{6}$.

Решение.

(a) Воспользуемся формулой из упражнения 3 выше. Сначала с учетом полученного в разделе 7 вычислим знаменатель $a(x)$:

$$\int_0^1 {}_t p_x \mu(x+t)dt = \int_0^1 d\,{}_t q_x = {}_t q_x\Big|_0^1 = {}_1 q_x - {}_0 q_x = {}_0 p_x - {}_1 p_x = 1 - p_x = q_x .$$

Числитель находим с помощью формул раздела 16. Имеем

$$\int_0^1 t\,{}_t p_x \mu(x+t)dt = p_x q_x \int_0^1 \frac{tdt}{(q_x t + p_x)^2} = p_x \int_0^1 \frac{dt}{q_x t + p_x} - p_x^2 \int_0^1 \frac{dt}{(q_x t + p_x)^2} =$$

$$= \frac{p_x}{q_x} \ln(q_x t + p_x)\Bigg|_0^1 + \frac{p_x^2}{q_x} \frac{1}{q_x t + p_x}\Bigg|_0^1 = -\frac{p_x}{q_x} \ln p_x + \frac{p_x^2}{q_x}\left(1 - \frac{1}{p_x}\right) =$$

$$= -\frac{p_x}{q_x^2}(q_x + \ln p_x) .$$

Упражнение 5. Вычислите знаменатель тем же методом, что и числитель. Можно ли найти числитель так же, как знаменатель, т.е. без использования таблицы 5?

Что касается части (b), то она решается аналогично соответствующей части задачи 1, но гораздо проще, поэтому мы оставляем ее читателю.

III. Графики функций $\mu(x)$ (кривая интенсивности), $l_x \mu(x)$ (кривая смертности) и l_x (кривая дожития) приведены в [Биг-Баг], с. 74-75. Перерисовывать их сюда представляется совсем уже проявлением дурного тона, тем более что точно все равно не перерисуешь. Вместо графиков соберем вместе несколько цитат из «Биг-Бага» (с. 70, 73, 74, 80).

Указанные цитаты манифестируют различия между данными таблицы 4 и показаниями, считываемыми с упомянутых графиков. Вот как это делается.

При равномерном распределении смертей имеет место равенство $a(x) = 1/2$, эквивалентное (точному, а не приближенному!) вычислению L_x по формуле трапеций (подраздел II). Цитата: $a(x) = 1/2$ – это «обычное приближение функции $a(x)$, пригодное для лиц всех возрастов, кроме совсем юных и очень старых, где, как показывает график кривой смертности, это предположение может не соответствовать действительности». В п. 4 раздела 15 мы проверили (с помощью читателя), что формула трапеций справедлива для всех итераций таблицы 4, кроме самой первой. Следовательно, для «совсем юных и очень старых» возрастов таблица и кривая смертности демонстрируют разные данные.

Полученный вывод отмечен еще в одной цитате: указанные графики «отражают текущую смертность народонаселения, а не данные, приведенные в таблице» 4, и рассматриваются, «чтобы оценить роль таблиц смертности». К сожалению, ни содержание термина «текущая смертность», ни связи между ним и представлениями, формируемыми таблицей смертности, в [Биг-Баг] никак не комментируются. Именно поэтому мы и позволили себе привлечь внимание читателя к различиям, отмеченным в самом начале данного подраздела.

Завершим его этимологией термина «кривая смертности». В п. 5) раздела 13 было установлено равенство $l_x\mu(x) = l_0 f_X(x)$, т.е. «функция $l_x\mu(x)$ пропорциональна функции плотности сл. в. X. Поскольку $l_x\mu(x)$ является ожидаемой плотностью смертей в возрасте x, когда речь идет о совокупности случайного дожития, график функции $l_x\mu(x)$ называется *кривой смертности*» [Биг-Баг], с. 75. Интересно, а если бы речь шла о чем-то другом, то не назывался бы?

Фигура умолчания, возникающая в Биг-Баговских текстах, посвященных таблицам смертности, пробуждает традиционные (и одновременно трогательные до комизма) представления о пресловутой «коммерческой тайне», «конфиденциальной информации» и прочих симулякрах развитого постдемократического общества. Тем не менее, понятно, что подобные «бассейны отрицательного информационного давления» призваны составить отдельный рубеж обороны указанного общества перед лицом собственной смертности, которую не удается удержать в рамках таблиц...

IV. Чтобы подавить собственные страхи, заметим, что точки локального экстремума функции $l_x\mu(x)$ (кривой смертности) соответствуют точкам перегиба функции l_x (кривой дожития), поскольку

$$\frac{d}{dx} l_x\mu(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{d}{dx} l_x\right) = -\frac{d^2}{dx^2} l_x .$$

Экстремумы смерти соответствуют перегибам дожития – каково? Интересно, что сказал бы на это Воланд...

Продолжим серию заданий из «Биг-Бага».

Задания. 3. (Задача 3.13.) Пусть l_{x+t} строго убывает на интервале $0 \le t \le 1$. Покажите, что

(a) если функция l_{x+t} выпукла вверх, то $q_x > \mu(x)$,

(b) если функция l_{x+t} выпукла вниз, то $q_x < \mu(x)$.

Решение. Разберем случай (a), оставив (b) читателю.

Представим разность $\mu(x) - q_x$ с помощью функции дожития:

$$\mu(x) - q_x = -\frac{s'(x)}{s(x)} - \frac{s(x) - s(x+1)}{s(x)} = \frac{s(x+1) - s(x) - s'(x)}{s(x)}.$$

Таким образом, нам предстоит работать с функцией $s(x+t)$, в терминах которой легко переписываются условия задачи ($l_x = l_0 s(x)$). А именно, функция $s(x+t)$ должна строго убывать и быть выпуклой вверх на $0 \le t \le 1$. Кроме того, из раздела 1 мы помним, что функция дожития всюду положительна. Из ее дифференциальных свойств нам потребуется только обычная дифференцируемость.

Из полученного представления разности $\mu(x) - q_x$ следует, что нам нужно доказать неравенство $s(x+1) - s(x) - s'(x) < 0$, т.е. проверить, что график функции $s(x+t)$ в точке $t = 1$ лежит *строго под* своей касательной в точке $t = 0$:

$$s(x+t)_{|t=1} < [s(x) + s'(x)t]_{|t=1}.$$

Нестрогий аналог этого неравенства у нас уже есть: согласно [Фихт-I], с. 300, из выпуклости функции вверх следует, что ее график всеми точками лежит под любой своей касательной или на ней. Нам надо исключить последний случай. Предположим противное, т.е. что именно он и выполняется, и рассмотрим функцию

$$h(t) = s(x+t) - s(x) - s'(x)t.$$

Имеем $h(0)=0$ по построению и $h(1)=0$ по предположению. Так как $s(x+t)$ выпукла вверх, то ее производная не возрастает ([Фихт-I], с. 299), в частности, $s'(x+t)\le s'(x)$, т.е. $h'(t)\le 0$ при $0\le t\le 1$.

Условия $h(0)=h(1)=0$ позволяют записать

$$\int_0^1 h'(u)du = h(1) = 0.$$

В силу неположительности h' на отрезке $[0,1]$ отсюда следует, что $h'(t)=0$ при $0\le t\le 1$ ([Фихт-II], с. 111), поэтому $h(t)=0$, $t\in[0,1]$. Это значит, что $s(x+t)=s(x)+s'(x)t$. Чтобы усмотреть здесь противоречие, нужно включить в условия задачи требование, чтобы график функции l_{x+t} не сводился к прямой на отрезке $0\le t\le 1$.

Упражнение 6. Можно ли уговорить себя, что последнее требование выводится из условий задачи?

4. (Задача 3.14.) Покажите, что

(a) $\dfrac{d}{dx}l_x\mu(x)<0$, если $\dfrac{d}{dx}\mu(x)<\mu^2(x)$,

(b) $\dfrac{d}{dx}l_x\mu(x)=0$, если $\dfrac{d}{dx}\mu(x)=\mu^2(x)$,

(c) $\dfrac{d}{dx}l_x\mu(x)>0$, если $\dfrac{d}{dx}\mu(x)>\mu^2(x)$.

Решение для всех трех случаев восстанавливается из следующей цепочки равенств:

$$\frac{d}{dx}l_x\mu(x) = l_0[s(x)\mu(x)]' = l_0[s'(x)\mu(x)+s(x)\mu'(x)] =$$

$$= l_0\left[-\mu(x)e^{-\int_0^x \mu(\sigma)d\sigma}\mu(x) + e^{-\int_0^x \mu(\sigma)d\sigma}\mu'(x)\right] =$$

$$= l_0 e^{-\int_0^x \mu(\sigma)d\sigma}[\mu'(x)-\mu^2(x)];$$

использовались п. 4) раздела 13 и таблица 1.

5. (Задача 3.41.) На базе стандартной таблицы смертности с помощью удвоения интенсивности смертности из этой таблицы построена вторая таблица смертности. Будет ли коэффициент смертности q'_x при любом заданном возрасте в новой таблице более чем в два раза выше, в точности в два раза выше или менее чем в два раза выше коэффициента смертности q_x стандартной таблицы?

Решение. Исходный коэффициент смертности равен $q_x = 1 - p_x$, где

$$p_x = e^{-\int_0^1 \mu(x+t)dt}$$

(см. раздел 4). Точно так же новый коэффициент смертности равен $q'_x = 1 - p'_x$, где

$$p'_x = e^{-\int_0^1 2\mu(x+t)dt} = p_x^2.$$

Тогда

$$2q_x - q'_x = 2 - 2p_x - 1 + p_x^2 = (1 - p_x)^2.$$

Очевидно, $2q_x - q'_x \geq 0$. Ответ из [Биг-Баг] показывает, что неравенство должно быть строгим, что эквивалентно оценке $p_x < 1$. «Подогнать под ответ» можно, скажем, апеллируя к представлениям, связанным с таблицей смертности, где основные вероятности не могут принимать единичные значения.

……………………

Ну вот, пожалуй, и достаточно с таблицами смертности. Основные моменты отражены, обеспокоенности высказаны, аналитика работает – задачи можно решать бесконечно...

Электрон так же *не-*
исчерпаем, как и атом[28].

...В феврале 2013 г. вдруг оказалось, что учебное пособие в КФУ должно содержать не менее 80 страниц. В мае нынешнего года выясни-

[28] *Ленин В.И.* Материализм и эмпириокритицизм. Цит. по [Ле], с. 257.

лось, что объем пособия повысился до 100 страниц. «Счетчик включен!» Сейчас 17 августа 2014 г., и, видит Бог, сентябрь уже сам по себе рассматривается как угроза. Он *надвигается!*

Радости тем, кто ищет,
Мужества тем, кто спит[29].

Надо подстраховаться! Однако мы так разогнались, что впору подумать и о *горизонте исследования*. Нас ждет еще пара дискретных вещей, одна непрерывная, а потом, уже в третьей главе, мы немного поговорим об исчислении нетто-премий. Затем, как и в [Ка], мы позволим себе немного порефлексировать и подумать над тем, что можно было бы назвать *актуарной героикой.* Будем трепетно надеяться, что соответствующая *муза* нас еще неоднократно осенит, но вот страница заканчивается, и пора ее перевернуть...

18. Дискретная модель

Таблица смертности по самому своему построению, или, говоря осторожнее, по своей структуре представляет собой объект *дискретный.* Это означает, что все функции, содержащиеся в указанной таблице, определены для целых значений аргумента. Тем не менее, с самого начала нашего знакомства с таблицей смертности она вовлекалась в систему *непрерывных* представлений, причем двояко.

Во-первых, предшествующим развитием тематики было подготовлено восприятие каждой из компонент таблицы как следа на решетке $\mathbf{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\}$ соответствующей функции, *a priori* существовавшей на луче $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$. Во-вторых, мы с радостью приветствовали эффективное подтверждение такого существования, восстанавливая указанные компоненты на луче по узлам решетки посредством трех видов интерполяции.

Троекратность порождала надлежащую множественность, органность, даже объемность восприятия, не только не оставляя времени для раздумий по поводу оценки приближений, но и создавая атмосферу карнавала с положенными по сценарию Пульчинеллой, Панталоне, Бальдуччи и другими масками.

И ведь что интересно: при формировании текста перед мысленным взором автора проносились образы теплого италийского неба и оной же

[29] *Гребенщиков Б.Б.* Деревня. Цит. по [Гре].

манящей ночи – совсем как в «Оводе» или (на худой конец) в «Золотом ключике» – а отнюдь не стылые коридоры «Маски Красной смерти». Интерполяции заставляют нас проживать каждое мгновение жизни, вселяя надежду на продолжение в следующем цикле. Тем самым мы открываем для себя новый (семиотический) оберег, пусть ненадолго, но отодвигающий от нас тусклые воды Стикса...

……………………

Вернемся к нашим формулам. В данном разделе мы вводим, пусть и под контролем непрерывности, но откровенно дискретную модель, посвоему организующую актуарный контекст. Суть дела раскрывает для нас [Биг-Баг], с. 66. «С продолжительностью предстоящей жизни связана дискретная случайная величина, определяющая число полных будущих лет, прожитых лицом (x) до смерти. Она называется *пошаговой продолжительностью предстоящей жизни лица* (x) и обозначается через $K(x)$. Поскольку сл. в. $K(x)$ является наибольшим целым числом, не превосходящим $T(x)$», то она представляет собою то, что, например, в курсе математического анализа называется целой частью числа $T(x)$, т.е. $K(x) = [T(x)]$.

В [Фал], с. 37, величина $K(x)$ называется *округленной остаточной продолжительностью жизни*, или *округленным временем жизни.* Здесь же сразу отмечается предпочтительность термина «урезанная» вместо «округленная». В [Биг-Баг] *усеченная* (*урезанная*) приводится в качестве варианта названия, но используется все-таки *пошаговая* – чтобы «подчеркнуть дискретный характер сл. в. $K(x)$».

Впрочем [Биг-Баг], так же, как и его русский перевод, никого не обманет своей деланной респектабельностью. Маскируемый упомянутым подчеркиванием отказ от «усеченной» и «урезанной» при выборе русского аналога английскому *curtate* – это тоже своего рода оберег.

Действительно, не следует «усекать» или «урезать» жизнь даже проговариванием. Ее лучше «пошагово продолжать» или, по крайней мере, «округлять». Кстати, последний термин представляет, так сказать, оберег-обманку. Ведь обычно округление предполагает приближение бóльшим числом, а $K(x)$ не превосходит $T(x)$ (в [Фал] этот момент тоже отмечен). Говоря «округленная», мы поступаем как дикари некоторых исследованных племен, которые скрывали свои подлинные имена от злых духов, прикрываясь вымышленными. Тоже страхование!..

Итак, определяющее соотношение $K(x)=[T(x)]$ является основой для непрерывного контроля над дискретностью: из определения функции «целая часть числа» следует совпадение событий

$$\{\omega\in\Omega : K(x)=k\}=\{\omega\in\Omega : k\le T(x)<k+1\}.$$

Величину $P[K(x)=k]$ авторы [Биг-Баг] называют функцией вероятности случайной величины $K(x)$, но если уж вести разговор в этих терминах, то нам нужна условная функция вероятностей сл. в. $K(x)$, т.е. $P[K(x)=k\mid X>x]$. Имеем

$$\begin{gathered}P[K(x)=k\mid X>x]=P[k\le T(x)<k+1\mid X>x]=\\ =P[k<T(x)\le k+1\mid X>x]=P[T(x)>k\mid X>x]-\\ -P[T(x)>k+1\mid X>x]={}_k p_x-{}_{k+1}p_x={}_k p_x\cdot q_{x+k}={}_{k|}q_x.\end{gathered}$$

Последние четыре равенства уже возникали в разделе 9. Равенство между первой и второй строками дает повод вспомнить про «столкновение» условной и безусловной моделей. Впрочем, такое столкновение всегда возникает «в самом начале»: см. раздел 1.

Дело в том, что, в соответствии с принятыми «им» установками «Биг-Баг» использует безусловную запись $P[K(x)=k]$ вместо условной $P[K(x)=k\mid X>x]$, так что в «Биг-Баговском» оригинале приведенной выше цепочки равенств зависимость «$\mid X>x$» отсутствует.

«Использует безусловную запись», *подразумевая*, что вероятность все-таки условная, или все-таки «работает с безусловными вероятностями», считая, что они просто равны величинам, естественно возникающим как условные? – Вот вопрос, разобрать который в настоящем пособии мы очень надеемся не успеть...

Вот путь, который я оставлю тайной...[30]

[30] *Гребенщиков Б.Б.* Сны о чем-то большем. Цит. по [Гре].

...Ведь мы упоминаем обо всем этом только благодаря авторитету «Биг-Бага»: коль скоро он «работает», то за этим что-то да стоит! Правда, «Фал» считает, что все-таки не «работает», а «использует», тем самым только подливая масло в огонь...

Чтобы не «зацикливаться» на этих вещах, приводим следующее

Упражнение. Как отмечает «Биг-Баг», при переходе от второго к третьему выражению в приведенной выше цепочке «перемена неравенств местами возможна». Основание: «поскольку при наших предположениях о том, что распределение $T(x)$ непрерывно, $P[T(x)=k]=$ $=P[T(x)=k+1]=0$». 1) Докажите эти равенства. 2) Докажите равенства $P[T(x)=k\,|\,X>x]=P[T(x)=k+1\,|\,X>x]=0$.

Вернемся к пошаговой продолжительности. Из приведенной цепочки следует, что условная функция распределения сл. в. $K(x)$ при условии $X>x$ имеет вид

$$F_{K(x)}(y\,|\,X>x)=P[K(x)\le y\,|\,X>x]=\sum_{h=0}^{k=[y]}P[K(x)=h\,|\,X>x]=$$

$$=\sum_{h=0}^{k}{}_{h|}q_x={}_{0|}q_x+{}_{1|}q_x+\ldots+{}_{k|}q_x=$$

$$={}_0p_x-{}_1p_x+{}_1p_x-{}_2p_x+\ldots+{}_kp_x-{}_{k+1}p_x=1-{}_{k+1}p_x={}_{k+1}q_x.$$

Итог выпишем отдельно: при $y\ge 0$ и $k=[y]$ имеем

$$F_{K(x)}(y\,|\,X>x)={}_{k+1}q_x.$$

Замечание. Часто из контекста ясно, что $T(x)$ является продолжительностью предстоящей жизни лица (x). В этом случае мы пишем T вместо $T(x)$. Аналогично, мы будем писать K вместо $K(x)$.

Теперь нам нужно вычислить некоторые макрохарактеристики случайной величины K в духе (но, разумеется, не «в букве») разделов 10 и 11. Вначале запишем

$$e_x=E[K(x)\,|\,X>x]=\sum_{k=0}^{\infty}kP[K(x)=k\,|\,X>x]=\sum_{k=0}^{\infty}k\,{}_kp_xq_{x+k}\,. \qquad (18.1)$$

Это мы еще не нашли e_x, а только применили то, что нам известно. Для дальнейшего нам понадобится что-то вроде лирического отступления, которому дадим название

Немного об исчислении конечных разностей

Для продолжения цепочки (18.1) с помощью суммирования по частям нам достаточно странички со списком формул в приложениях из «Биг-Бага» – выводить все остальное мы будем сами. Удовольствие это новое, однако, поражает полная аналогия с интегрированием по частям при вычислении $\mathring{e}_x$. Никаких утверждений выделять не будем; отметим только, что предполагаем существование e_x, т.е. сходимость ряда из правой части (18.1).

Действие оператора Δ конечных разностей на функциях определяется как

$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k),\ k \in \mathbf{Z}_+ .$$

Действие Δ на произведениях функций легко выводится из определения:

$$\Delta[f(k)g(k)] = f(k+1)\Delta g(k) + g(k)\Delta f(k);$$

проделайте этот вывод в качестве **упражнения**.

Просуммируем обе части последнего равенства по k от 0 до n; имеем

$$f(k)g(k)\Big|_0^{n+1} = f(n+1)g(n+1) - f(0)g(0) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \Delta[f(k)g(k)] = \sum_{k=0}^{n} f(k+1)\Delta g(k) + \sum_{k=0}^{n} g(k)\Delta f(k).$$

Отсюда получается формула суммирования по частям:

$$\sum_{k=0}^{n} g(k)\Delta f(k) = f(k)g(k)\Big|_0^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} f(k+1)\Delta g(k).$$

В «нашем» случае будет $f(k) = -{}_k p_x$ и $g(k) = k$. Тогда $\Delta g(k) = 1$, $\Delta f(k) = {}_k p_x - {}_{k+1} p_x = {}_k p_x q_{x+k}$, а суммирование по частям дает

$$\sum_{k=0}^{n} k\,{}_k p_x q_{x+k} = -k\,{}_k p_x\Big|_0^{n+1} - \sum_{k=0}^{n}(-{}_{k+1}p_x)\cdot 1 =$$

$$= -(n+1)\,{}_{n+1}p_x + \sum_{k=0}^{n} {}_{k+1}p_x\,. \qquad (18.2)$$

Прежде, чем устремить n к бесконечности, нам надо доказать соотношение

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\,{}_{n+1}p_x = 0 \qquad (18.3)$$

(ср. предложение 11.1). Начнем с того, что для любого $m \in \mathbf{Z}_+$ последовательность частичных сумм

$$\sum_{k=m}^{N} \Delta(-{}_k p_x) = \sum_{k=m}^{N}({}_k p_x - {}_{k+1}p_x) = {}_m p_x - {}_{N+1}p_x$$

при $N \to \infty$ стремится к ${}_m p_x$ (см. раздел 5). Значит, ряд

$$\sum_{k=m}^{\infty} \Delta(-{}_k p_x)$$

с неотрицательными членами сходится, и его сумма равна ${}_m p_x$. Поэтому мы можем записать при $m = n+1$

$$(n+1)\,{}_{n+1}p_x = (n+1)\sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta(-{}_k p_x) \le$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{\infty} k\Delta(-{}_k p_x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} k\,{}_k p_x q_{x+k} \qquad (18.4)$$

– получился прямой аналог неравенства (10.2)! Ряд в правой части оценки (18.4), являясь остатком сходящегося ряда в правой части цепочки (18.1), сходится к нулю при $n \to \infty$. Тогда по правилу двух милиционеров из неравенства (18.4) немедленно следует соотношение (18.3).

Переходя теперь к пределу в (18.2) при $n \to \infty$, мы можем завершить цепочку (18.1):

$$e_x = \sum_{k=0}^{\infty} k\,{}_k p_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+1}p_x = \sum_{\nu=1}^{\infty} {}_\nu p_x\,.$$

Упражнения. 1. Попытайтесь установить формулу суммирования по частям сразу для рядов – в терминах f и g. Может быть, при таком подходе изложение оформилось бы проще?

2. Сформулируйте, а если получится, то и докажите аналоги предложений 10.1, 10.2 и 11.1 для случая конечных разностей. Каким будет аналог леммы 10.1?

Следующий на очереди – второй момент

$$E[K(x)^2 \mid X > x] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 {}_k p_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \Delta(-{}_k p_x) = \ldots$$

про который мы предполагаем, что он существует, т.е. сходится ряд справа (перед многоточием). Очень не хочется повторять здесь тот путь, по которому выше мы пришли к окончательному выражению для e_x. Надеемся, что читатель повторит этот путь самостоятельно в качестве **упражнения.** Мы же «пойдем другим путем» и продолжим начатую выше цепочку формальным применением суммирования по частям:

$$\ldots = k^2(-{}_k p_x)\Big|_0^{\infty} + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta(k^2)({}_{k+1} p_x).$$

Упражнение. Убедитесь в правомерности (и неформальности) такого применения.

Доказав в качестве еще одного **упражнения**, что

$$k^2(-{}_k p_x)\Big|_0^{\infty} = \lim_{k\to\infty} k^2(-{}_k p_x) = 0,$$

окончательно будем иметь

$$E[K(x)^2 \mid X > x] = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\,{}_{k+1} p_x = \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu-1)\,{}_{\nu} p_x .$$

После всего, что здесь только что произошло, дисперсия вычисляется уже совсем тривиально:

$$D[K \mid X > x] = E[K^2 \mid X > x] - (E[K \mid X > x])^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)\,{}_k p_x - e_x^2 .$$

Немного переведя дух после проведенного марш-броска, мы начинаем смутно припоминать про какое-то лирическое отступление, якобы необходимое для чего-то дальнейшего. И понимаем, что и то, и другое осталось далеко позади...

Дробная часть дожития

...Где моя душа
На исходе дня...[31]

...Наступает 19 августа – памятная дата на исходе советской реальности, которой тогда оставалось прожить «дробную часть года». Впрочем, «оставалось» – это скорее о власти, а реальность умирает только сейчас, на не таком уж и далеком юго-западе. А когда умирает реальность, возникает сюрреализм[32], или «сюр», как говорили когда-то. «Чует мое сердце, что мы накануне грандиозного шухера», – озарило когда-то одного забавного искателя приключений[33]. «Что бы ни произошло дальше, стране уже не бывать прежней», – очень давно проворчал себе под нос один пафосный волшебник[34].

С каждой написанной здесь строчкой ее автор все отчетливее видит, как его душою завладевает «кураж пофигиста». Зачем все это поступательное развитие темы с трогательными открытиями, известными «за бугром» как минимум полвека? Зачем эта восторженность в стиле "ave probabilitas" и постоянное стремление сводить ее к математическому анализу? Теперь уже кажется, что вся эта толща исписанных листков проникнута «сюром» в ожидании «шухера»...

А займемся-ка напоследок «критикой буржуазных теорий страхования»! – вскричим мы с ностальгическим задором...

Где-то в отвалах и терриконах первой части затерялось обещание вернуться к сравнению условной и безусловной моделей на материале цитат из «Биг-Бага». Поскольку до обещанного Приложения руки могут и не дойти, коснемся этой темы прямо сейчас.

---

[31] Парафраз на тему известного шлягера 90-х в исполнении Натальи Ветлицкой.

[32] Такой, каким он был на заре своего возникновения; см. Википедию.

[33] Папандопуло из к/ф «Свадьба в Малиновке» (1967), 82-я минута фильма.

[34] Гэндальф, цит. по [Толк], с. 14.

Процитируем [Биг-Баг], переход со страницы 83 на страницу 84.

«Если, как и ранее, x является целым числом, то анализ можно провести, введя случайную величину $S = S(x)$, такую, что

$$T = K + S,$$

где T является продолжительностью предстоящей жизни, K – пошаговой продолжительностью предстоящей жизни, а S – случайной величиной, представляющей прожитую дробную часть года, в котором наступила смерть. Поскольку K является неотрицательной целочисленной случайной величиной, а S – случайной величиной непрерывного типа, вся масса которой сосредоточена на интервале $(0,1)$, мы можем исследовать их совместное распределение, записав

$$P[(K = k) \bigcap (S \le s)] = P(k < T \le k + s) = {}_k p_x \, {}_s q_{x+k}.$$

Теперь, воспользовавшись выражением для ${}_s q_{x+k}$ в предположении равномерности распределения, как показано в таблице 3.6.1[35], получим

$$P[(K = k) \bigcap (S \le s)] = {}_k p_x s q_{x+k} = {}_{k|} q_x s = P(K = k) P(S \le s).$$

Таким образом, совместное распределение с. в. K и S может быть разложено на произведение маргинальных распределений с. в. K и S. Поэтому в предположении равномерности распределения моментов смерти с. в. K и S оказываются независимыми. Поскольку распределение $P(S \le s) = s$ является равномерным на $(0,1)$, случайная величина S имеет именно такое равномерное распределение».

Последняя фраза заставляет очень крепко задуматься.

> – Профессор Козырев.
> – Ну, кто же не знает профессора Козырева!
> – Да, но меня только вчера утвердили в этом звании!
> – Да?.. А я вас только сегодня так и назвала!..
>
> Из к/ф «Весна»[36]

[35] Наша таблица 5.

[36] 1947 г. Цит. по http://www.youtube.com/watch?v=kuTP9NZuEDw (Киноконцерн «Мосфильм»).

Может, и не стоит так распаляться из-за каждой «мелочи, которая имеет решающее значение», но откуда следует, что $P(S \le s) = s$?.. Решите пока следующее

Упражнение. Совпадает ли произведение событий $A = \{\omega \in \Omega : K = k\}$ и $B = \{\omega \in \Omega : S \le s\}$ с событием $C = \{\omega \in \Omega : k < T \le k + s\}$ или для получения равенства $P(A \cap B) = P(C)$ все-таки придется, как и в одном из упражнений выше, воспользоваться непрерывностью распределения $T = T(x)$, в частности, соотношением $P(T = k) = 0$?

Эффект запирания, созданный сотней страниц условного подхода, устойчиво связал с этим подходом чувство комфортности, которое теперь данный подход и подпитывает...[37] (Похоже, нам все-таки удалось хоть немного поквитаться с «Биг-Багом».)

Согласно разделу 9, произведение ${}_k p_x \, {}_s q_{x+k}$ равно не безусловной, а условной вероятности, а именно $P(k < T \le k + s \mid X > x)$. Таким образом, самое большее, что можно «выжать» из условия равномерности распределения моментов смерти (раздел 16), – это соотношение

$$P[(K = k) \cap (S \le s) \mid X > x] = P[K = k \mid X > x] \cdot s \qquad (18.5)$$

Упражнение. Разложение $T = K + S$ накладывает ограничения $0 \le S < 1$, а участие вероятности $P(k < T \le k + s \mid X > x)$ в основополагающей цепочке равенств (см. приведенную выше цитату) предполагает условие $0 < s < 1$.

Подумайте, почему так происходит, и рассмотрите «опасные» случаи $k = 0$, $s = 0$, $S = 0$. Так ли уж они опасны? С использованием определения условной вероятности проверьте, будет ли равенство (18.5) эквивалентно своему безусловному аналогу

$$P[(K = k) \cap (S \le s)] = P[K = k] \cdot s \qquad (18.6)$$

[37] В книге, которую мы также «оставим тайной», суть механизма запирания определяется тем, что расходы на улучшение продукта оказываются слишком высокими по сравнению с будущими выгодами. Впрочем, предложение, к которому относится данная сноска, объясняет этот механизм ничуть не хуже.

Замечание. Из соотношения (18.6) ясно, что если выполняется условие равномерности распределения моментов смерти в смысле раздела 16, то сл. в. K и S независимы тогда и только тогда, когда $s = P(S \le s)$, т.е. сл. в. S имеет равномерное распределение в классическом смысле (см., например, [Фе-II], с. 35).

Упражнения. 1. Что можно сказать о связи между указанными в замечании равномерностями? Может быть, это просто игра слов?

2. Если попытаться сформулировать условный аналог независимости случайных величин K и S (при условии $X > x$), то каким должно быть s в соотношении (18.5) – равным $s = P(S \le s \mid X > x)$ или все-таки $s = P(S \le s)$? Коль скоро s не зависит от x, то получается, что $s = P(S \le s)$, нет?

В этой связи, так сказать, «по горячим следам», рассмотрим, как «Биг-Баг» решает вопрос о независимости в предположении постоянной интенсивности смертности. Разумеется, в безусловной модели. «В частном случае, когда $p_{x+k} = p_x$ – константа», имеем

$$P[(K = k) \cap (S \le s)] = p_x^k (1 - p_x^s) \quad \text{и} \quad P(K = k) = p_x^k (1 - p_x).$$

Тогда (переписываем из [Биг-Баг], с. 84, немного подсократив)

$$P[(K = k) \cap (S \le s)] = P(K = k)\frac{1 - p_x^s}{1 - p_x} = P(K = k) P(S \le s).$$

Первый вопрос, который здесь сразу же возникает – тот же, что и выше: откуда следует, что $P(S \le s)$ имеет именно такой вид? Вместе с вопросом возникает ощущение, что данный вопрос решается в стилистике «искусства возможного»: что получится, то и объявляется тем, что нам нужно!

Второй вопрос – тот самый, «по горячим следам»: если $P(S \le s)$ имеет именно такой вид, т.е. $P(S \le s) = 1 + p_x + \ldots p_x^{s-1}$, то получается, что $P(S \le s)$ зависит еще и от x – нет ли здесь «подводных камней»? «Биг-Баг» спасает положение, говоря, что « p_x – константа» (см. выше), но по контексту это воспринимается как независимость от k, не более.

В общем, как и во все времена, вопрос о независимости вновь порождает неформальные дискуссии. Прикосновение к этой проблематике делает изложение современным, актуальным и одновременно выдержанным в лучших традициях.

До начала третьей, заключительной части нам остается совсем немного…

Один нерешенный вопрос…

Вернемся к линейной интерполяции и еще немного помучаем «Биг-Бага», себя и читателя. Вновь перед нами многострадальная страница 84. Торжеством безусловной модели выглядит следующий

«**Пример 3.6.2.** Покажем, что в предположении равномерности распределения смертей

(a) $E[T]=E[K]+1/2$, (b) $D[T]=D[K]+1/12$.

Решение. (a) $E[T]=E[K+S]=E[K]+E[S]=E[K]+1/2$...»

В оригинале п. (а), разумеется, стоит формула $\overset{\circ}{e}_x = e_x + 1/2$, но обозначения $\overset{\circ}{e}_x$ и e_x мы стойко резервируем для условной модели. Пункт (b) читатель доделает сам, а мы подумаем, как решается п. (а) в условной модели.

Перенесемся на мгновение в раздел 16 – туда, где линейная интерполяция, – и поймаем себя на том, что не все там доделали. Очарованные эстетикой интерполяции, мы почему-то решили, что достаточно ограничиться произвольным интервалом – разве на любом другом будет не то же самое?

Вглядимся пристальнее в уже изученную ситуацию. Мы предположили, что между соседними целыми точками полуоси $\mathbf{R}_+$ функция дожития восстанавливается линейной интерполяцией. В этой ситуации мы получили формулы для актуарных величин, когда промежутком был интервал $(x, x+1)$, а условием – неравенство $X > x$.

Теперь мы хотим получить формулу для ${}_tq_x$ в случае, когда условие $X > x$ остается, а интервал сдвигается вправо. В результате сшивания таких интерполяций должна выстроиться глобальная картина поведения вероятности ${}_tq_x$ при $t > 0$. Начнем с леммы.

Лемма 18.1. *Если функция дожития определена во всех неотрицательных целых точках, а на каждом интервале* $(k, k+1)$, $k \in \mathbf{Z}_+$, *она восстанавливается с помощью линейной интерполяции, то для любых* $k, x \in \mathbf{Z}_+$ *и любого* $u \in [0,1]$ *имеет место формула*

$$_{k+u}q_x = {}_kq_x + u \cdot {}_kp_x q_{x+k}.$$

Доказательство. В числителе исходного выражения исследуемой вероятности

$$_{k+u}q_x = \frac{s(x) - s(x+k+u)}{s(x)}$$

вычтем и прибавим $s(x+k)$, затем ко второй из получившихся разностей применим предположение о линейной интерполяции. Получаем

$$_{k+u}q_x = {}_kq_x + u\frac{s(x+k) - s(x+k+1)}{s(x)} = {}_kq_x + u \cdot {}_kp_x q_{x+k},$$

что и требовалось.

Теперь дадим решение п. (а) примера 3.6.2 из [Биг-Баг] в рамках условного подхода.

Предложение 18.1. *Если продолжение функции дожития с решетки* $\mathbf{Z}_+$ *на полуось* $\mathbf{R}_+$ *осуществляется линейной интерполяцией, то*

$$\overset{\circ}{e}_x = e_x + \frac{1}{2}.$$

Доказательство. По определению (раздел 11) запишем

$$\overset{\circ}{e}_x = E[T(x) \mid X > x] = \int_0^\infty t\, f_{T(x)}(t \mid X > x)dt = \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} t\, f_{T(x)}(t \mid X > x)dt.$$

Чтобы определить вид функции плотности $f_{T(x)}(t \mid X > x)$, вспомним формулу $F_{T(x)}(t \mid X > x) = {}_tq_x$ из п. 3) раздела 7. Дифференцируя эту формулу по u при $t = k+u$, получим

$$f_{T(x)}(k+u \mid X > x) = \frac{d}{dt}({}_kq_x + u \cdot {}_kp_x q_{x+k}) = {}_kp_x q_{x+k}$$

по лемме 18.1 и продолжим цепочку равенств для $\overset{\circ}{e}_x$ с использованием формулы 18.1. Имеем

$$\overset{\circ}{e}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (k+u) f_{T(x)}(k+u \mid X > x) du = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (k+u)\, {}_k p_x q_{x+k} du =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k\, {}_k p_x q_{x+k} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x q_{x+k} = e_x + \frac{1}{2},$$

что и требовалось.

Отметим, что равенство $E[S(x)|X>x] = 1/2$ получилось как следствие равномерности распределения моментов смерти (линейной интерполяции), а не равномерности распределения сл. в. $S = S(x)$.

Упражнения. 1. Докажите, что $\sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x q_{x+k} = 1$.

2. Проверьте корректность всех преобразований в цепочке равенств, связывающей $\overset{\circ}{e}_x$ с e_x, прежде всего, в части, касающейся сходимости рядов.

3. Можно ли установить предложение 18.1, используя его безусловный аналог из примера 3.6.2 выше?

4. Как установить равенство $E[S(x)|X>x] = 1/2$ на основе равномерности распределения сл. в. $S = S(x)$?

5. Что можно сказать о связи между $\overset{\circ}{e}_x$ и e_x в случае постоянной интенсивности смертности, а также интерполяции Бальдуччи?

Задание ([Биг-Баг], с. 92, задача 3.17) сформулируем в контексте условной модели.

Определим случайную величину соотношением

$$K^*(x) = \begin{cases} K(x), & K(x) = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \\ n, & K(x) = n, n+1, \ldots, \end{cases}$$

и обозначим $E[K^*(x) \mid X > x]$ через $e_{x:\overline{n|}}$. Это математическое ожидание называется *усеченной пошаговой ожидаемой продолжительностью жизни.* Покажите, что

$$\text{(a) } e_{x:\overline{n|}} = \sum_{0}^{n-1} k\,{}_{k|}q_x + n\,{}_n p_x = \sum_{1}^{n} {}_k p_x\,,$$

$$\text{(b) } D[K^*(x) \mid X > x] = \sum_{0}^{n-1} k^2\,{}_{k|}q_x + n^2\,{}_n p_x - (e_{x:\overline{n|}})^2 =$$

$$= \sum_{1}^{n} (2k+1)\,{}_k p_x - (e_{x:\overline{n|}})^2.$$

19. Об аналитических законах смертности

Аналитический закон смертности заключается в указании аналитического выражения для любой из характеристик таблицы 1 и назидании, что именно эти четыре выражения определяют смертность.

Обычно указываются интенсивность смертности (которую «Биг-Баг» называет также *функцией смертности*) и функция дожития.

В следующей таблице приводятся несколько семейств простых аналитических функций смертности и дожития, соответствующих некоторым известным законам. Для удобства ссылок указаны названия законов, лежащих в их основе, и дата публикации.

Таблица 6

Исходное распределение	$\mu(x)$	$s(x)$	Ограничения
Де Муавр (1729)	$(\omega - x)^{-1}$	$1 - x/\omega$	$0 \le x < \omega$
Гомпертц (1825)	Bc^x	$\exp[-m(c^x - 1)]$	$B > 0$, $c > 1$, $x \ge 0$
Мейкем (1860)	$A + Bc^x$	$\exp[-Ax - m(c^x - 1)]$	$B > 0$, $A \ge -B$, $c > 1$, $x \ge 0$
Вейбулл (1939)	kx^n	$\exp(-ux^{n+1})$	$k > 0$, $n > 0$, $x \ge 0$

Комментарии к таблице.

1) Использованы обозначения $m = B/\ln c$ и $u = k/(n+1)$.

2) Закон Гомпертца является частным случаем закона Мейкема при $A = 0$.

3) Если $c = 1$ в законах Гомпертца и Мейкема, то мы приходим к показательному (постоянная интенсивность смертности) распределению.

В этой связи можно подумать над следующим вопросом.

Упражнение. Как соотносятся показательная интерполяция и закон Мейкема при $c = 1$ в свете постоянной интенсивности смертности? Имеется в виду, конечно, поинтервально сшитая показательная интерполяция...

4) При рассмотрении закона Мейкема считалось, что константа A отвечает несчастному случаю, а выражение Bc^x – старению.

5) В книге С.Е. Савича [Сав] фамилия Мейкем записывалась как «Макегам».

Как отмечает «Биг-Баг» на своей странице 85 (откуда мы и заимствуем основу для настоящего раздела), «в последние годы энтузиазм в отношении простых аналитических функций дожития существенно уменьшился. Многие полагают, что вера в универсальные законы смертности наивна... Однако в результате некоторых недавних исследований оживились биологические аргументы в поддержку аналитических законов смертности».

Думаю, что составитель настоящего пособия не ошибется, если попытается объяснить такое оживление энергией, увлеченностью и работами выдающегося российского ученого, академика Сергея Петровича Капицы (см., например, [Кап]).

Упражнение. А что такое аналитическая функция?

Включение в настоящее пособие данного раздела обусловлено не только почтенностью тематики, связанной с аналитическими законами. Да, эта тематика обсуждается еще в книге С.Е. Савича [Сав]. Но дело также и в том, что содержание настоящего раздела образует почву для многочисленных заданий.

Такими заданиями из [Биг-Баг], с. 94, 95, мы и завершим данный раздел, а с ним – и вторую главу нашего пособия.

Задания. 1. (Расширение задачи 3.34.) Самостоятельно проверьте элементы таблицы 6 для всех четырех законов.

2. (Задача 3.35.) Рассмотрите модификацию закона де Муавра, которая задается соотношениями

$$s(x)=\left(1-\frac{x}{\omega}\right)^{\alpha},\ 0\le x<\omega,\ \alpha>0.$$

Подсчитайте (a) $\mu(x)$, (b) $\overset{\circ}{e}_x$.

Решение делегируем читателю. Пункт (a) – элементарное задание на дифференцирование, пункт (b) – простой пример на интегрирование. Отметим только, что интегрирование ведется от нуля, но не до бесконечности, а до $\omega-x$, кстати, почему?

Ответы: (a) $\mu(x)=\alpha/(\omega-x)$, (b) $\overset{\circ}{e}_x=(\omega-x)/(\alpha+1)$.

3. (Задача 3.42.) Пусть $\mu(x)=Bc^x$, $c>1$. Покажите, что функция $l_x\mu(x)$ имеет максимум (в оригинале – минимум) в возрасте x_0, где $\mu(x_0)=\ln c$. Указание: в этом упражнении используется результат задачи 4 раздела 17.

Решение. Мы находимся под «юрисдикцией закона Гомпертца». Выполняя указание, обратимся к рекомендованной задаче. Из ее решения явствует, что $[l_x\mu(x)]'=C_x[\mu'(x)-\mu^2(x)]$, где $C_x>0$ при любом $x\ge 0$. Далее,

$$\mu'(x)-\mu^2(x)=\mu(x)[\ln c-\mu(x)].$$

Отсюда следует, что функция $l_x\mu(x)$ имеет единственный экстремум в точке x_0 с, где $\mu(x_0)=\ln c$.

Два уточнения, основанные на возрастании $\mu(x)$. Во-первых, чтобы точка x_0 была возрастом, т.е. чтобы $x_0>0$, *должно выполняться условие* $\ln c>\mu(0)=B$. Вместе с монотонностью $\mu(x)$ и переходом $\lim\limits_{x\to+\infty}\mu(x)=+\infty$ оно влечет за собой $x_0=\ln((\ln c)/B)/\ln c>0$.

Во-вторых, при выполнении условия $\ln c>B$ с возрастанием x через значение $x=x_0$ разность $\ln c-\mu(x)$ меняет знак с плюса на минус. Это означает, что $x=x_0$ – точка максимума функции $l_x\mu(x)$.

Упражнение. Какие классические теоремы математического анализа использовались в задании 3, чтобы доказать существование, единственность и положительность точки x_0?

Следует отметить, что «Биг-Баг» уже не в первый раз допускает «хитрые неточности». Видимо, как средство от списывания...

4. (Задача 3.43.) Пусть $\mu(x) = Ac^x / (1 + Bc^x)$ для $x > 0$.

(a) Определите функцию дожития $s(x)$.

(b) Проверьте, что мода распределения сл. в. X, возраста в момент смерти, задается соотношением $x_0 = [\ln(\ln c) - \ln A]/\ln c$.

Решение проводится аналогично предыдущей задаче.

Ответы. (a) Функция дожития получается интегрированием величины $-\mu(x)$ с последующим потенцированием и представляется формулой $s(x) = [(1 + Bc^x)/(1 + B)]^{-A/(B\ln c)}$.

(b) Мода случайной величины X – это точка максимума функции плотности $f_X(x) = -s'(x)$. Читателю предстоит дифференцирование функции дожития с участием громоздких выражений. Все остальное – как в предшествующей задаче.

………………..

Навстречу настоящей стоимости…

...Горячее и бравое
Бодрит меня –
Страна встает со славою
Навстречу дня[38].

Мы, наконец, покидаем главу 2 «Биг-Бага». Эта глава стала для нас своего рода выгоном, подобным тому, по которому путешествовал известный градоначальник. Часто и вправду было непонятно, куда занесет нас нелегкая...

«– Ну, куда тебя слоняться несет? – говорила она: – на первую кучу наткнешься и завязнешь! Кинь ты свое озорство, Христа ради!

Но бригадир был непоколебим... «Прост он был, – поясняет летописец, – так прост, что даже после стольких бедствий простоты своей не оставил»[39].

---

[38] *Шостакович Д.Д. – Корнилов Б.П.* Песня о встречном. Цит. по Sovmusic.ru (http://www.sovmusic.ru/text.php?fname=vstrechn).

[39] *Салтыков-Щедрин М.Е.* История одного города. Цит. по [Салт], с. 100; пунктуация оригинала.

Тем не менее, составителю все-таки представляется, что его лирическому герою удалось обойти большинство «куч» и проложить между ними траекторию условного подхода «вовремя и без потерь». Да и сам Петр Петрович Фердыщенко, думаю, был не так уж прост. Хоть и сообщил летописец, что упомянутый выгон не заключал в себе никаких сокровищ ни на поверхности земли, ни в недрах оной, все-таки есть подозрение, что бригадир искал там нефть. Но... От дальнейших ассоциаций воздержимся, так сказать, «во избежание»...

В §*, в самом конце решения задачи 3, говорилось про какой-то подход, развиваемый в рамках идеологии селективных таблиц смертности. Так вот, после некоторых колебаний мы решили не включать в пособие ни сами эти таблицы, ни их идеологию. Остаток пособия мы хотим прожить для удовольствия, не понукаемого, но по-отечески напутствуемого чувством долга. То есть прожить его не столько пособно, сколько монографически смачно и со вкусом. Понимая при этом, что, как учил старина К. Поппер, в конечном счете, все определяется не интенциями, а ненамеренными последствиями интенциональных действий...[40]

Тем более что о вкусах не спорят...

Вот хорошее назидание:

«...Ученые девятнадцатого века не желали признать жестокую правду. «Божественная комедия» была переведена в Кембридже, штат Массачусетс, Чарлзом Элиотом Нортоном, а потом еще раз Генри Уодсвортом Лонгфелло, с примечаниями, и братом Томаса Карлейля в Лондоне; и все они не пожелали прочесть ее так, как читаете вы. Из этого следует, что англосаксы и протестанты никогда не понимали вашей страны. Они хотели сладости без железа – без знаменитого итальянского terribilità. Прятались, отворачивались от жизни с ее многообразием...»[41]

Поэтому, наверное, и придумали современное страхование... Но настоящий оберег можно найти только у классика:

...«Харон, гнев укроти.
Того хотят – там, где исполнить властны
То, что хотят. И речи прекрати»[42].

…

[40] *Карл Поппер.* Предсказания и пророчества в социальных науках. См. [Поп], с. 566.

[41] *Торнтон Уайлдер.* Теофил Норт. Цит. по [Норт], № 8, с. 60.

[42] *Данте.* Божественная комедия, Песнь третья, стих 94. Цит. по [Дан], с. 597.

Глава III. Страхование жизни

В эти самые мгновения *Основы* (актуарных расчетов) «плавным движением превращаются в» *Элементы* (оных расчетов). Страхование жизни – огромная отрасль, которая вместе со страхованием имущества и страхованием ответственности составляет грандиозное здание страховой индустрии. И не надо думать, что, ограничиваясь математическими аспектами страхования, мы сильно облегчим себе жизнь. Перефразируя Гельвеция, можно сказать, что жизнь облегчают не факты – ее облегчают принципы.

Вот и мы – пока еще совершенно не представляя, чем предстоит заполнить данную главу, – должны сейчас провозгласить принципы ее заполнения. Попытаемся это сделать самостоятельно.

При изучении «Биг-Бага» возникает отчетливое ощущение, что его сюжеты привязаны к некоторым практикам страхования, о которых мы ничего не знаем, если вообще когда-нибудь узнаем. Кроме того, лавина информации, вываливаемой на нас «Биг-Багом», поневоле заставляет «отсеивать лишнее». Поэтому дальнейшая драматургия будет стремиться не «вширь», а «вглубь» – не столько «приращивать новое», сколько искать внутренние взаимосвязи в этом «новом».

Действиями разворачивающейся драмы будут обоснования соотношений между различными актуарными стоимостями, ее интригой – продвижение условного подхода, который иногда будет играть роль «вызова времени». В порыве откровенности можно даже сказать, что мы «нарываемся»: ниоткуда не следует, что продвигаемый в пособии условный подход вдруг не даст сбой в форме какого-нибудь неожиданного противоречия.

Но в этом и привлекательность проводимой здесь работы. Подобная неопределенность противопоказана «рефлексу цели», а «рефлекс истины» в наше время достаточно девальвирован. Поэтому проявляемый «кураж» вполне может служить стимулом к действию.

Чтобы не сводить его только к «куражу пофигиста», вернемся в лоно академизма и повторим еще раз: привлекательность избранного *modus'a operandi* заключается в его «фальсифицируемости по Попперу»[43]. А это уже ко многому обязывает читателя...

Начнем с вспомогательного раздела.

---

[43] *Карл Поппер. Ibid.* с. 322.

20. Величины i, δ и v

Данный раздел – своего рода «раздел-лемма». Поэтому сразу установим связь между величинами i, δ и v:

$$v = \frac{1}{1+i} = e^{-\delta} \ . \tag{20.1}$$

Для студентов достаточно уже написанного, коллегам это неинтересно, правила хорошего тона допускают ссылку на «стандартный курс» финансового менеджмента, однако чувство долга требует комментариев.

Величина v называется коэффициентом дисконтирования, или дисконтирующим множителем; первое равенство (20.1) можно считать определением данной величины. Чувство естественности этого определения воспитывается следующим сюжетом, который вот уже лет двадцать как считается «основной молитвой» разнообразных курсов по финансовым исчислениям.

Если в момент времени $t=0$ (настоящее) инвестируется начальный капитал C под процент i, то в момент времени $t=1$ (т.е. через год) наращенный капитал обретает величину $C + Ci = C(1+i)$.

Со второго шага следует выбирать принцип дальнейшего формирования капитала: принцип простых процентов (проценты начисляются только на основной капитал), и тогда на втором шаге получаем $C(1+i) + Ci = C(1+2i)$, или принцип сложных процентов (проценты начисляются как на основной капитал, так и на уже «заработанные» проценты). В последнем случае в момент времени $t=2$ будем иметь $C(1+i) + C(1+i)i = C(1+i)^2$.

В актуарной математике (по крайней мере, со времен С.Е. Савича) используется принцип сложных процентов.

Интуиция, индукция или здравый смысл – смотря по тому, что ближе вкусам и склонностям читателя, – позволяет сделать вывод о том, что в момент времени $t=n$, $n=1,2,\ldots$, величина капитала, наращенного на начальный капитал C под процент i по принципу сложных процентов, имеет вид $C(n) = C(1+i)^n$.

С момента данного вывода термин «принцип сложных процентов», как правило, в изложении больше не звучит.

Теперь предположим, что в момент времени $t = m$ в будущем нам потребуется сумма, равная S. Какой капитал P следует инвестировать сейчас, в момент $t = 0$, под процент i, чтобы к моменту $t = m$ на него «наросла» сумма, в точности равная S?

Это задача, обратная той, что приведена выше.

Действительно, начальный капитал P через m лет порождает капитал, равный $P(1+i)^m$. Нам необходимо, чтобы он был равен S. Но тогда, очевидно,

$$P = \frac{1}{(1+i)^m} S = v^m S .$$

Вот так, естественным путем, и возникает коэффициент v.

Следующий сюжет связан с «изгнанием из Рая», который возник в душе обучающегося благодаря «хорошей укладке» понимания формулы $C(n) = C(1+i)^n$.

Здесь два момента. Первый связан с продолжением указанной формулы с решетки $\mathbf{Z}_+$ на полуось $\mathbf{R}_+$.

Проблема. Далее нам понадобится формула

$$C(t) = C(1+i)^t ,\ t \ge 0 . \qquad (20.2)$$

Требуется обосновать эту формулу, считая ее установленной для целых положительных t. Идеальным представляется обоснование, опирающееся на некоторую модель, с которой формула (20.2) просто считывалась бы. Именно такое обоснование представлено выше для формулы $C(n) = C(1+i)^n$, $n \in \mathbf{Z}_+$.

Следует отметить, что в доступной литературе данная проблема в явном виде не ставится. В качестве примера приведем ее «стилевое» решение в [Фал], с. 6, подраздел «Накопления».

«Выберем некоторый промежуток времени в качестве единичного (как правило, это будет год) и предположим, что процентная ставка за этот промежуток равна i. Допустим, что в момент $t_0 = 0$ сумма C инвестируется на t единиц времени. Принцип сложных процентов влечет, что в момент $t_0 + t$ капитал C превратится в сумму $C(t) = = C(1+i)^t$. Величина $A(t) = (1+i)^t$ называется коэффициентом накопления за время t».

Упражнение. Обоснована ли формула (20.2) в приведенном отрывке?

Второй момент связан с пониманием того, что накопление капитала может иметь более сложную природу. Чтобы создать предметную область для изучения «общего случая», вводится величина

$$\delta(t) \equiv \delta_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{C(t+\Delta t) - C(t)}{C(t)\Delta t} = \frac{C'(t)}{C(t)} = [\ln C(t)]',$$

называемая *интенсивностью начисления процента в момент* t. «Биг-Баг» вводит ее в терминах $A(t)$, что, впрочем, эквивалентно.

В частном случае (20.2) введенная величина оказывается постоянной, $\delta(t) \equiv \delta$, равной $\delta = \ln(1+i)$. Отсюда и получается соотношение (20.1).

Соглашение. Всюду далее мы считаем, что накопление капитала со временем следует формуле (20.2), а интенсивность начисления процента связана с процентной ставкой и коэффициентом дисконтирования формулой (20.1).

21. Актуарная настоящая стоимость

Название данного подраздела наглядно демонстрирует, что выше, когда мы писали «навстречу настоящей стоимости», – это была отнюдь не фигура речи.

Актуарная настоящая стоимость (АНС) страхования – это математическое ожидание случайной величины, представляющей современную стоимость будущих платежей страховщика по договору страхования. АНС страхования, при котором производится выплата размера единица, как правило, обозначается через A. При этом дополнительная информация детализируется в индексах.

Если Z – случайная величина современной стоимости будущего платежа размера единица, то общий принцип вычисления АНС A (при условном подходе) может быть представлен соотношением

$$A = E[Z \mid X > x].$$

Структура случайной величины Z зависит от конкретного вида страхования, но общий принцип построения Z основан на соглашении, что современная (настоящая) стоимость будущей выплаты размера 1 равна v^t, где t – длина интервала времени от настоящего момента до момента выплаты, а v – дисконтирующий множитель из соотношения (20.1).

Для вычисления условных математических ожиданий будем интенсивно применять формулу

$$E[Z \mid B] = \frac{E(ZI_B)}{E(I_B)} = \frac{E(ZI_B)}{P(B)}$$

из книги [Уит] (с. 91), столь своевременно обнаруженной составителем в своих «завалах».

О, сколько нам открытий чудных...

Представим героев нашего дальнейшего повествования – сначала для непрерывной, а затем для дискретной модели. Вначале изложение следует главе 4 «Биг-Бага», а там видно будет...

Непрерывная модель (выплаты производятся в момент смерти).

I. *Бессрочное страхование на случай смерти*

Данный вид предполагает выплату по смерти страхователя, в какой бы момент в будущем она ни произошла.

Если величина выплаты составляет единицу и выплата производится в момент смерти лица (x), то $Z = v^{T(x)}$, и АНС данного вида страхования равна

$$\bar{A}_x = E[Z \mid X > x] = \frac{E(v^T I_{T>0})}{P(X > x)} = \frac{\int_0^\infty v^t f_T(t)dt}{P(X > x)} =$$

$$= \int_0^\infty v^t f_{T(x)}(t \mid X > x)dt = \int_0^\infty v^t\, {}_t p_x \mu(x+t)dt\,.$$

Приведем важный частный случай *постоянной интенсивности смертности* $\mu(x+t)\equiv\mu$. Из таблицы 1 получаем $s(x)=e^{-\mu x}$, откуда ${}_t p_x = s(x+t)/s(x)=e^{-\mu t}$. Тогда с учетом (20.1) имеем

$$\bar{A}_x=\int_0^\infty \mu e^{-(\mu+\delta)t}dt=\frac{\mu}{\mu+\delta}.$$

II. *Страхование на случай смерти на срок n лет* (срочное на случай смерти) предполагает, что страховая выплата осуществляется только в случае, если страхователь умрет в течение n лет с момента заключения договора страхования. Если в момент смерти лица (x) производится выплата размера единица, то

$$Z=v^{T(x)}I_{T(x)\le n} \quad \text{и} \quad \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}=\frac{E(v^T I_{0<T\le n})}{P(X>x)}=\int_0^n v^t\,{}_t p_x\mu(x+t)dt.$$

Как, наверное, заметил читатель, в обозначении индикатора множества произошли некоторые изменения: во имя экономии места из обозначения $I_{\{T(x)\le n\}}$ исчезли фигурные скобки. Подобной практики мы будем стараться придерживаться и дальше.

III. *Страхование на дожитие на срок n лет* (срочное на дожитие) предполагает выплату по истечении n лет в том и только в том случае, когда страхователь будет жив по происшествии n лет с момента заключения страхового договора. Это, в частности, означает, что $T(x)>n$. Если выплачиваемая сумма составляет единицу, то

$$Z=v^n I_{T(x)>n}.$$

Тогда

$$A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}=E[Z\mid X>x]=v^n E[I_{T(x)>n}\mid T(x)>0]=v^n\frac{E(I_{T>n})}{P(T>0)}=$$

$$=v^n\frac{P(T(x)>n)}{P(T(x)>0)}=v^n\frac{s(x+n)}{s(x)}=v^n\,{}_n p_x.$$

IV. *Смешанное страхование на срок n лет* (срочное смешанное) предполагает обязательство осуществить выплату либо по смерти страхователя, либо по дожитии им до истечения n-летнего срока, в зависимости от того, что случится раньше. Если размер выплаты – единица и если выплаты на случай смерти производятся в момент смерти, то

$$Z = v^{T(x)} I_{T(x)\le n} + v^n I_{T(x)>n}.$$

АНС данного вида страхования равна

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{\;\;1}{\overline{n}|}}$$

в силу II и III.

Упражнение. В какой момент времени производится выплата по страхованию на дожитие.

V. *Бессрочное страхование на случай смерти, отсроченное на m лет*

Предполагает выплату в момент смерти страхователя при единственном условии, что этот момент наступит не раньше, чем через m лет после заключения страхового договора.

Для единичной выплаты имеем

$$Z = v^{T(x)} I_{T(x)>m} \quad \text{и} \quad {}_{m|}\bar{A}_x = \int_m^{\infty} v^t \, {}_t p_x \mu(x+t) dt.$$

Существует целая серия видов отсроченного страхования.

Упражнение. Постройте отсроченный аналог для каждого из видов страхования II – IV. «Биг-Баг» (с. 105) утверждает, что это возможно.

Дискретная модель (выплаты производятся в конце года смерти).

1. *Бессрочное страхование на случай смерти* лица (x) с выплатой размера 1 в конце года смерти, когда бы эта смерть ни наступила.

Имеем

$$Z = v^{K(x)+1} I_{K(x)\ge 0} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} I_{K(x)=k},$$

где $K(x)=[T(x)]$ – пошаговая продолжительность предстоящей жизни; в выражении для величины Z имеется еще одно, невидимое слагаемое $0\cdot I_{K(x)<0}$. Подсчитаем актуарную настоящую стоимость:

$$A_x = E[Z \mid X > x] = \frac{E(ZI_{X>x})}{E(I_{X>x})} = \frac{E\left[\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} I_{(K=k)\bigcap(X>x)}\right]}{E(I_{X>x})} =$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P[(K=k)\bigcap(X>x)]}{P(X>x)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P[K(x)=k \mid X>x] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_k p_x q_{x+k}$$

(см. раздел 18).

Замечание. Величину Z можно было бы определить без умножения на $I_{K(x)\geq 0}$, т.е. как $Z = v^{K(x)+1}$, поскольку сохраняющаяся при таком определении возможность $K(x)<0$ все равно бы потом устранялась условием $X > x$. Однако в таком случае пришлось бы объяснять, что такое $v^{K(x)+1}$, когда $K(x)<0$, и как это соотносится со здравым смыслом.

2. *Страхование на случай смерти сроком на* n *лет* с единичной выплатой в конце года смерти. Страховая выплата осуществляется только в случае, если страхователь умрет в течение n лет с момента заключения договора страхования. В этом случае

$$Z = v^{K(x)+1} I_{0\leq K(x)\leq n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} I_{K(x)=k},$$

$$A^1_{x:\overline{n}|} = E[Z \mid X > x] = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, {}_k p_x q_{x+k};$$

вычисления аналогичны оным из предыдущего пункта.

3. «Механизм действия» страхования на дожитие имеет дискретную природу – это явствует из уже полученного в непрерывной модели, откуда этот вид и переносится сюда дословно. Другое открытие, которое

нас здесь поджидает, состоит в том, что при страховании на дожитие выплата не может производиться ни в момент смерти, ни в конце года смерти.

Восприимем эти открытия как знак свыше: пора двигаться дальше. Завершить перечисление оставшихся видов страхования нам поможет следующее.

Упражнение. Постройте дискретные аналоги величин из п. V и из упражнения к этому пункту.

Теперь хотя бы некоторым из введенных персонажей надо как-то себя проявить. Подберем для них несколько сцен из «Биг-Бага».

Вспомним, что, начиная с раздела, посвященного Бальдуччи, существенным элементом нашей техники безопасности при работе с дискурсами, изучающими смертность, стали восходящие еще к «Золотому ключику» представления советских людей об Италии. Развитие этих представлений влечет за собой и развитие указанной техники...

Онтогенез есть быстрое и
краткое повторение филогенеза.
Э. Геккель

...Издревле считалось, что залогом выживания всегда были умение быстро двигаться и, без всякого сомнения, любовь. Чтобы советские люди об этом не забывали, Господь, похоже, и создал Италию...

– Погоня?
– Погоня, Ваше сиятельство.
– Это замечательно. Когда уходишь от погони, ни о чем другом уже не думаешь.
«Формула любви»

....

22. «Труффальдино из Бергамо»,
или
Страхование дель арте

«Что некоторая вещь выражает другую – так говорят тогда, когда в ней имеются свойства, соответствующие свойствам выражаемой вещи. Из рассмотрения того, что выражает, мы можем перейти к познанию соответстующих свойств выражаемой вещи, но нужно лишь, чтобы сохранялась определенная аналогия в свойствах».

Эта цитата из Готфрида Вильгельма Лейбница, которая вполне могла бы стать эпиграфом к настоящему разделу, если бы не ее размеры. Она заимствована из «Поисков совершенного языка» Умберто Эко[44], у которого мы находим следующее приближение к цели предпринимаемого цитирования:

«...Даже если характеры выбраны произвольно, даже если нет никакой уверенности в том, что первоначала, принятые ради удобства рассуждения, действительно являются таковыми, гарантией истинности метода является тот факт, что *форма предложения отражает объективную истину*»[45].

«Форма предложения» требует увенчать данное микровведение третьей цитатой, которая призвана взглянуть на него с самых общих позиций, подобно Лейбницу, «упорно думая о строго количественном исчислении, которое можно было бы применить к качественным понятиям», как о форме так называемого «слепого познания»:

«...Под слепым познанием понимается возможность осуществлять вычисления и добиваться точных результатов, опираясь на символы, значение которых нам не обязательно известно, или же мы не можем составить о нем ясного и отчетливого представления»[46].

Разумеется, мы не ставим перед собой масштабных философских или логических задач по развитию метода Лейбница. Мы даже не изучаем «определенную аналогию в свойствах» между некоторыми «символами» и некоторыми «характерами». Нас привлекает *неожиданность* самой аналогии и то *вдохновение,* которым она позволяет «характерам» питать «символы».

---

[44] Цит. по [Эко], с. 291. «В самом деле, по-иному и не мог думать теоретик предустановленной гармонии,» – комментирует У. Эко приведенную цитату.

[45] *Ibid.* с. 290.

[46] *Ibid.* с. 285-286.

Вот эта аналогия:

«Символы»

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_k p_x q_{x+k} \qquad \bar{A}_x = \int_0^{\infty} v^t\,{}_t p_x \mu(x+t)dt$$

$$C_x = vq_x + vp_x C_{x+1} \qquad B_x = \frac{i}{\delta} vq_x + vp_x B_{x+1}$$

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\,{}_k p_x q_{x+k} \qquad \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^{n} v^t\,{}_t p_x \mu(x+t)dt$$

$$\updownarrow$$

«Характеры»

Беатриче	–	Флориндо
Смеральдина	–	Труфальдино
Клариче	–	Сильвио

Рис. 1

Динамика «символов» приводит к тому, что после умножения на i/δ величины из левой колонки становятся равными соответствующим величинам из правой.

Развитие «характеров» заканчивается тем, что дамы и кавалеры, соединенные пронзившими их стрелами Амура (в роли которых выступают строки), соединяются еще и узами Гименея.

Дальнейшему изложению предпошлем краткое содержание комедии Карло Гольдони, которая еще в 1959-м году называлась «Слуга двух хозяев», а в 1976-м под обновленным титулом «Слуга двух господ» скрылась в лучах своей знаменитой экранизации под названием «Труффальдино из Бергамо», усилившей а*фф*ектацию имени героя и прочно вошедшей в культурный багаж советского человека[47].

[47] В изложении интриги мы следуем [Гол], с. 241-330. Текст фильма имеется, например, на http://vvord.ru/tekst-filma/Truffaljdino-iz-Bergamo/ .

Итак,

...В Турине погибает Федериго Распони, сестра которого, Беатриче, приняв его имя и внешность, устремляется вдогонку за своим любимым, Флориндо Аретузи, бежавшим в Венецию от преследований по обвинению в смерти Федериго. Беатриче является в дом купца Панталоне, который был банкиром Федериго в Венеции и должен был стать его тестем. Решая с ним финансовые вопросы в образе Федериго, Беатриче вынуждена предъявить права и на его дочь, Клариче, разрушая ее надежды на помолвку со своим любимым, Сильвио, которого Беатриче побеждает на дуэли и который убеждает Флориндо в том, что его враг Федериго жив.

Волей случая Флориндо и Беатриче оказываются в одной гостинице. Со временем становится ясно, что в качестве орудия этой воли выступает склонный к авантюрам Труфальдино, поступивший в услужение сначала к Беатриче, затем к Флориндо (остающихся в неведении друг о друге). Однако случай тянется к своей противоположности – предсказуемости и здравому смыслу, и Труфальдино, вызывая ответное чувство, влюбляется в Смеральдину – служанку Панталоне, выполнявшую конфиденциальные поручения Клариче.

Славный уроженец Бергамо развивает невероятную активность, желая угодить обоим хозяевам. Но такое рвение влечет за собой ошибки, и каждого из господ, когда его вещи обнаруживает у себя другой, Труфальдино, окончательно заврвавшись, вынужден объявлять умершим. Беатриче и Флориндо, уверенные в том, что теперь могут обрести друг друга только на небесах, в самоубийственном порыве выскакивают из своих комнат и... обретают друг друга в коридоре гостиницы. Но свой «служебный обман» Труфальдино раскрывает только тогда, когда под угрозой оказывается его помолвка со Смеральдиной...

Таков вкратце сюжет пьесы. Следует отметить, что несчастного Федериго (как, кстати, и образ Турина) можно рассматривать в качестве *отсутствующей структуры* (в смысле другой книги У. Эко, [Эко-1]) развивающейся на ее основе комедии. Вообще, сам сюжет можно интерпретировать как яркое и неравнодушное описание шагов по исполнению условий договора страхования на случай смерти Федериго после наступления страхового случая.

Правда, остается некоторый осадок оттого, что в пьесе образ Федериго оказывается словно бы выброшенным за ненадобностью. Действительно, если его смерть явилась залогом счастья шести человек, то читатель ожидает, скажем, от Беатриче хотя бы намерения «возжечь погребальный костер»... Это, кстати, хорошо понимали создатели фильма, завершив его сценой, когда капитан гвардейцев оглашает приговор: «Флориндо оправдать!». Тема смерти Федериго приобретает законченность, его тень покидает Венецию и возвращается в Турин, договор страхования считается исчерпанным.

Теперь обратимся к аналогиям в драматургии.

Вначале вернемся к актуарной проблематике и представим доказательство соотношения

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x \tag{22.1}$$

в форме шпаргалки:

Динамика «символов»

	$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_k p_x q_{x+k}$	$\int_0^{\infty} v^t\, {}_t p_x \mu(x+t)\,dt = \bar{A}_x$	
	$A_x = vq_x + vp_x A_{x+1}$	$\bar{A}_x = \bar{A}^1_{x:\overline{1}\rceil} + vp_x \bar{A}_{x+1}$	$\bar{A}^1_{x:\overline{1}\rceil} = \frac{i}{\delta} vq_x$
$n \to \infty:$	формула Смеральдины	формула Труффальдино	условие Федериго
	$A^1_{x:\overline{n}\rceil} = vq_x + vp_x A^1_{x+1:\overline{n-1}\rceil}$	$\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil} = \bar{A}^1_{x:\overline{1}\rceil} + vp_x \bar{A}^1_{x+1:\overline{n-1}\rceil}$	${}_t p_x \mu(x+t) = q_x$
	$A^1_{x:\overline{n}\rceil} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, {}_k p_x q_{x+k}$	$\int_0^{n} v^t\, {}_t p_x \mu(x+t)\,dt = \bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil}$	

Рис. 2

Содержание рис. 2 можно считать гипертекстом с тремя основными узлами:

Левый. Получающаяся из элементарных соображений (в рамках актуарного контекста, разумеется) формула

$$A^1_{x:\overline{n}\rceil} = vq_x + vp_x A^1_{x+1:\overline{n-1}\rceil} \tag{22.2}$$

переходит в формулу

$$A_x = vq_x + vp_x A_{x+1} \tag{22.3}$$

под действием столь же элементарного (но уже в контексте математического анализа) предельного перехода $A^1_{x:\overline{n}\rceil} \to A_x$ при $n \to \infty$.

Соотношения (22.2) и (22.3) суть частные случаи формулы

$$C_x = vq_x + vp_x C_{x+1}, \tag{22.4}$$

которую мы называем формулой Смеральдины (отсюда и выбор обозначения «*C*» в (22.4)).

Средний. Имеет место почти полная аналогия с только что рассмотренным случаем. Формула

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^1_{x:\overline{1}|} + vp_x \bar{A}^1_{x+1:\overline{n-1}|} \qquad (22.5)$$

организует разбиение $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$ на два интеграла с заменой переменных во втором[48]. С помощью предельного перехода $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} \to \bar{A}_x$ при $n \to \infty$, манифестирующего определение несобственного интеграла ($\bar{A}_x$) как предела собственных ($\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$), формула (22.5) переходит в формулу

$$\bar{A}_x = \bar{A}^1_{x:\overline{1}|} + vp_x \bar{A}_{x+1}. \qquad (22.6)$$

Попутно отметим, что формулы (22.3) и (22.6) могут быть выведены автономно, исходя из свойств числовых рядов и несобственных интегралов, соответственно.

Однако, чтобы иметь возможность подключения к *левому узлу*, соотношения (22.5) и (22.6) еще предстоит довести до частных случаев рекуррентной формулы

$$B_x = \frac{i}{\delta} vq_x + vp_x B_{x+1}, \qquad (22.7)$$

которую мы будем называть формулой Труффальдино («*B*» – от фамилии Труффальдино – *Battochio*). Этой «доводке» посвящен

Правый узел. Требуется показать, что

$$\bar{A}^1_{x:\overline{1}|} = \frac{i}{\delta} vq_x. \qquad (22.8)$$

Следуя «Биг-Багу», констатируем, что данное соотношение выполняется в предположении равномерного распределения смертей, при котором ${}_t p_x \mu(x+t) = q_x$ для $0 \le t \le 1$ и целых $x \ge 0$. Спорадическое, словно «спохватывающееся» упоминание о целых значениях – это, как сказал бы Т. Норт, «свойство интеллектуального климата»...

[48] Более подробно (точнее, более органично) этот и другие узлы будут представлены в следующем разделе.

О том, почему предположение о равномерности распределения смертей из раздела 16 мы называем условием Федериго, мы поговорим позднее (если не забудем).

Итак, *левый узел* нашего исходного гипертекста на рис. 2 установил, что для $C_x = A_x$ справедлива формула (22.4), следовательно, величина $B_x = (i/\delta)A_x$ удовлетворяет соотношению (22.7). *Средний узел* с подключением *правого* демонстрирует, что этому же соотношению удовлетворяет величина $\bar{A}_x$. Слово «Биг-Багу», с. 121:

Поскольку формулы

$$\frac{i}{\delta}A_x = \frac{i}{\delta}vq_x + vp_x\left(\frac{i}{\delta}A_{x+1}\right) \tag{22.3'}$$

и

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta}vq_x + vp_x\bar{A}_{x+1} \tag{22.6'}$$

выражают одну и ту же рекуррентную формулу (а именно, (22.7)), имеют одинаковую область изменения x и одинаковые начальные значения 0 в точке ω (напомним, что это предельный возраст), величина $(i/\delta)A_x$ является решением для (22.6') и выполняется соотношение (22.1), которое и требовалось доказать.

Замечание. Целью «Биг-Бага» было доказать *только* (22.1), но выше, комментируя рис. 1, мы (возможно, опрометчиво) заявили, что после умножения на i/δ *все* величины из левой колонки рис. 1 становятся равными соответствующим величинам из правой.

Для верхней строки рис. 1 мы это только что продемонстрировали, для средней строки речь идет о связи формул Смеральдины и Труффальдино: если C_x удовлетворяет первой, то для $B_x = (i/\delta)C_x$ справедлива вторая. Но будет ли указанный комментарий верен для третьей строки рис. 1? Точнее, справедливо ли равенство

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta}A^1_{x:\overline{n}|} \tag{22.1'}$$

и если да, то возможно ли установить его тем же способом, что и соотношение (22.1)?

Треугольник Паскуале

Паскуале – это вымышленный персонаж, слуга, придуманный Труффальдино, чтобы сваливать на него свои ошибки. Вспомнив об этом, составитель вдруг понял, что выписал себе индульгенцию. Посмотрим, пригодится ли она.

Суть дела – в том, что доказательство равенства (22.1) покоится на авторитете «Биг-Бага», и поэтому нам нет необходимости вникать в обратные рекуррентные формулы с их областями определения и начальными значениями. Но формулы (22.1') у «Биг-Бага» нет, и нам приходится действовать на свой страх и риск.

Единственное, чем может помочь наш кормчий, – *соглашением* $A^1_{x:\overline{0}|} = 0$ для всех x, которое принимается на с. 112 в [Биг-Баг]. Аналог $\bar{A}^1_{x:\overline{0}|} = 0$ этого соглашения будет уже *свойством*, следующим из определения.

Теперь попытаемся воспроизвести дискурс «Биг-Бага».

Формулы

$$\frac{i}{\delta} A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} v q_x + v p_x \left(\frac{i}{\delta} A^1_{x+1:\overline{n-1}|} \right) \tag{22.2'}$$

и

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} v q_x + v p_x \bar{A}^1_{x+1:\overline{n-1}|} \tag{22.5'}$$

выражают одну и ту же рекуррентную формулу (а именно, (22.7)), а вот что касается одинаковости области изменения и начальных данных, то исходный дискурс придется слегка подкорректировать.

Для этого заметим, что если мы «пляшем» от $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$, то согласно (22.5') эта величина определяется через $\bar{A}^1_{x+1:\overline{n-1}|}$, последняя, в свою очередь, – через $\bar{A}^1_{x+2:\overline{n-2}|}$, и этот процесс за n шагов заканчивается на $\bar{A}^1_{x+n:\overline{0}|}$. Если же идти от величины $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$ влево, то она определяет $\bar{A}^1_{x-1:\overline{n+1}|}$, и через x шагов мы «упираемся» в $\bar{A}^1_{0:\overline{n+x}|}$. Стремясь к обозримости, запишем все произошедшее в виде цепочки

$$\bar{A}^1_{0:\overline{n+x}|} \leftarrow \ldots \leftarrow \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} \leftarrow \bar{A}^1_{x+1:\overline{n-1}|} \leftarrow \ldots \leftarrow \bar{A}^1_{x+n:\overline{0}|} = 0.$$

Таким образом, «многообразие», определяемое формулой (22.5'), «рассыпается» по строкам:

$$\begin{array}{l}
\bar{A}^1_{\overline{0:0}|} = 0 \\
\bar{A}^1_{\overline{0:1}|} \leftarrow \bar{A}^1_{\overline{1:0}|} = 0 \\
\bar{A}^1_{\overline{0:2}|} \leftarrow \bar{A}^1_{\overline{1:1}|} \leftarrow \bar{A}^1_{\overline{2:0}|} = 0 \\
\bar{A}^1_{\overline{0:3}|} \leftarrow \bar{A}^1_{\overline{1:2}|} \leftarrow \bar{A}^1_{\overline{2:1}|} \leftarrow \bar{A}^1_{\overline{3:0}|} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array} \qquad (22.9)$$

(формула (22.6') определяет только одну строку). Все вышеизложенное в полном объеме справедливо и для счетного двупараметрического семейства величин $(i/\delta)A^1_{\overline{x:n}|}$. Скорректированный дискурс будет звучать так.

Для любого целого $N > 0$ формулы (22.2') и (22.5') при $n = N - x$ выражают одну и ту же рекуррентную формулу, имеют одинаковую область изменения x, а именно, $x = 0,1,\ldots,N$ и одинаковые начальные значения 0 в точке $x = N$. Поэтому величина $(i/\delta)A^1_{\overline{x:n}|}$ является решением для (22.5') и выполняется соотношение (22.1'), которое и требовалось доказать.

...Когда, подобно Саурону, «в одной мгновенной вспышке наития»[49] составитель охватил взглядом вершину горы (22.9), опоясанную цепочками величин постоянной суммы индексов, он преисполнился благоговения. Один треугольник напомнил о другом – и образ основоположника теории вероятностей словно вживе восстал из небытия...

Не так уж просты, оказывается, были эти обитатели «механистического» XVIII века. Подозрения своего хозяина Труффальдино развеивал, «отщепляя» от себя Паскуале, причем в полном соответствии с законом сохранения – «сумма» их присутствия всегда оставалась постоянной. Тем самым создавалось два треугольника – по числу хозяев – которые «схлопнулись» в один, когда хозяева, наконец, соединились...

Так мы и перешли к драматургии «характеров», которую таким причудливым образом связали с динамикой актуарных «символов».

Все, что нам осталось – это объяснить себе вертикальные стрелки на рис. 2 в контексте рис. 1. Как может Клариче стремиться к Беатриче, а Сильвио – к Флориндо? Вот ответ:

---

[49] Уже по контексту ясно, что это за книга, и даже ясно, что это за место в книге. Будем потихоньку сворачивать очевидные ссылки...

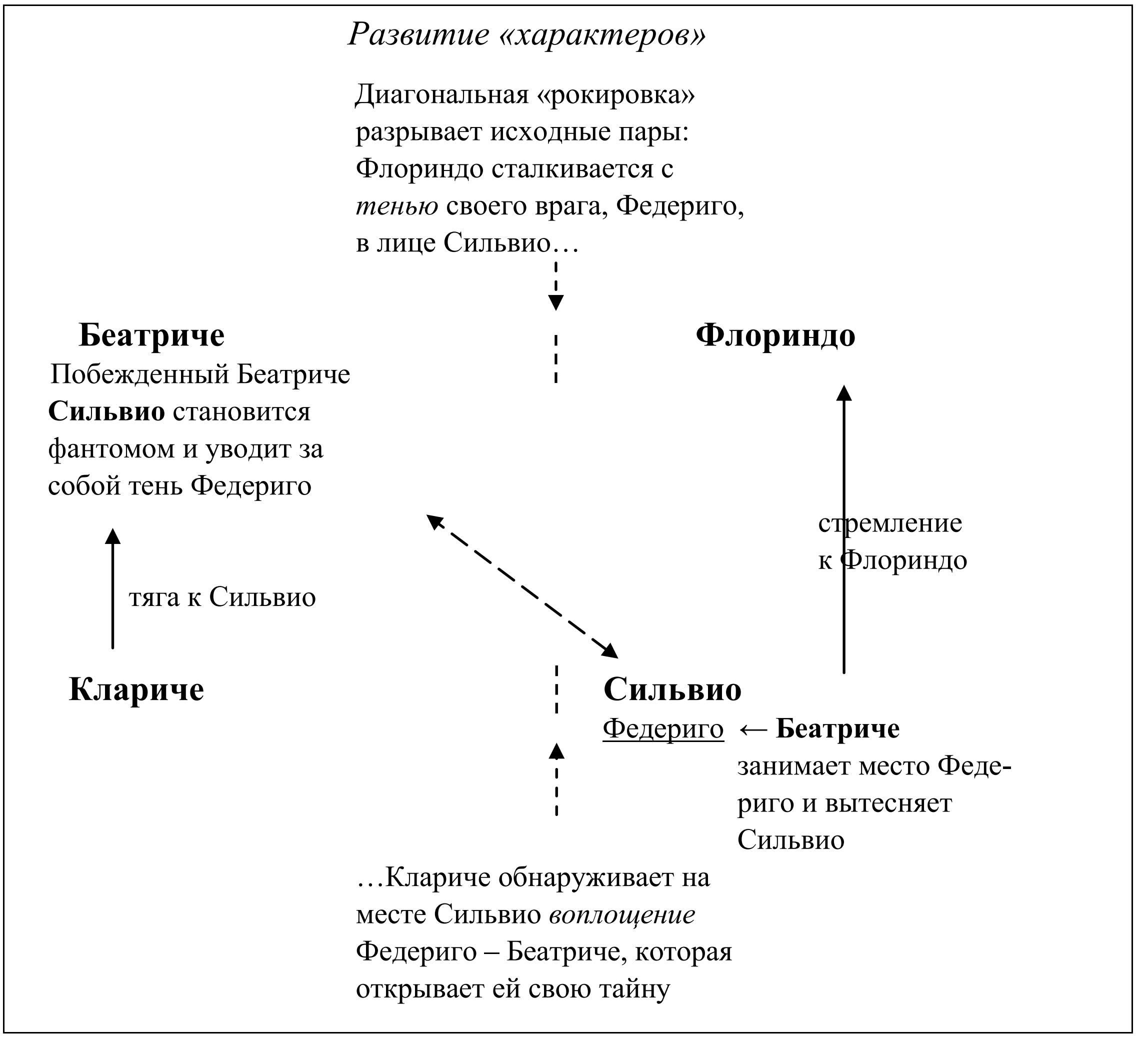

Рис. 3

В нижней части рис.1 представлены «начало» пьесы и ее «конец». Для «середины» как раз и нужна драматургия. Она и представлена на рис. 3 рядом ключевых «мизансцен».

Глядя на рис. 3, становится понятно, что к Флориндо стремится не Сильвио, а занявшая его место Беатриче – для того, собственно, и занявшая. Клариче стремится не к Беатриче, а к Сильвио, «выдавленному» на это место Беатриче. Пары на время разрушаются, чтобы в таком виде пережить все перипетии сюжета. Более того, пары разрушаются, чтобы немедленно начать воссоединение, из перипетий которого и складывается сюжет.

Как мы обещали выше, вернемся к теме Федериго.

Условие Федериго (22.8) потребовалось, чтобы величины $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$ и $\bar{A}_x$ удовлетворяли рекуррентной формуле Труффальдино. Оно придает смысл стремлению $\overline{A}^1_{x:\overline{n}|} \to \overline{A}_x$ Беатриче к Флориндо, потому что только указанная формула в конечном счете и спасает их от участи Ромео и Джульетты[50].

Но тогда должна существовать какая-то скрытая связь между образами Федериго и Труффальдино – скажем, в духе андерсеновского «Дорожного товарища»[51]. Энергичный бергамец выпрыгивает в первое же действие пьесы словно ниоткуда, чтобы сразу же начать помогать сначала Беатриче, потом Флориндо. (Образ, созданный на экране Константином Райкиным, только подчеркивает эту маску «чертика из коробочки». Чертика!)

Федериго и Труффальдино – антиподы, первый из них символизирует энтропию, застывший хаос, неподвижность, второй – энергию, активность, смешение стилей. Первый был аристократом, второй – слуга. Первый – был, второй – есть. Но каждый из них – демиург, управляющий драмой, только первый проникает в душу, а второй «сидит в печенках». Один заставляет терять покой, от другого нет никакого покою.

И еще – они оба умеют ускользать, создавая двойников: Федериго – реальных (Беатриче), Труффальдино – вымышленных (Паскуале). Извечный соперник классицизма – романтизм – искушает нас «заглянуть за сцену»: может быть, перед нами один и тот же персонаж, чью жизнь Чистилище разделило на две?

То, что «второй дзанни» становится слугой тех, кем мог повелевать «первый синьор», только усугубляет это подозрение. Труффальдино упрямо интересуется перепиской Беатриче, за что нещадно бит ею, а за то, что позволил себя бить, получил и от Флориндо (несправедливо преследуемого за убийство «шурина»). В этом избиении – и «облегчение кармы» Федериго, воздаяние ему за прошлое, и призыв быстрее исполнить свое предназначение – соединить разделенные его волей (и смертью) любящие сердца.

Но Труффальдино не видит того, что доступно взору Федериго. Являясь в посюсторонний мир в образе слуги, господин теряет способ-

---

[50] Надо же: англосакс убивает влюбленных, а итальянец, которому предписано быть воспитанным в эстетике terribilità, спасает их (ср. конец раздела 19).

[51] См. [Анд]. Наверное, не стоит искать среди прототипов Федериго легендарного Фридриха Штауфена, воевавшего с Ломбардской лигой еще за пять столетий до выхода пьесы. Хотя, кто знает, ведь отца Сильвио звали доктор Ломбарди...

ность провидеть скрытую связь явлений. Его оружием становится «слепое познание», но для этого ему приходится все время заставлять героев пьесы двигаться...

И вот она – *finita la commedia*, однако Труффальдино не исчезает, как можно было бы ожидать – он перехитрил судьбу, и вместо него исчез придуманный им для этого Паскуале...

Слои опоясывающих линейных цепочек стоимостей смерти сменились двумерным ниспадающим каскадом биномиальных коэффициентов распределения суммы индикаторов дожития. Впрочем, это уже не вошло в пьесу: готовую к запуску формулу $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ скрыл

Занавес

....

23. «Смешение языка»

Для «укладки» сюжетной линии предыдущего раздела весьма полезной, как мы видели, оказалась книга [Эко], помогающая мобилизовать ресурсы *содержания* языка для написания, например, учебного пособия. Анализируя провалы проектов создания универсального языка, указанная книга демонстрирует универсальность попыток если не самого такого создания, то хотя бы выхода за рамки языковых условностей, присущих отдельным областям знания.

1) Подобный выход позволяет, например, выявлять новые аспекты старых научных догм. Рассмотрим уже звучавший на этих страницах закон «онтогенез есть повторение филогенеза». В старом советском учебнике биологии данный императив выглядел довольно убедительно, так сказать, в терминах самой биологии. Однако две вещи вызывали смутное беспокойство. Во-первых, «форма предложения»: было в ней что-то магическое и одновременно что-то неуловимо марксистско-ленинское. Во-вторых, когда составитель пытался вспомнить формулировку закона самостоятельно, онтогенез и филогенез упорно менялись в ней местами...

Возникает интересный пример «смешения языка», или, что в данном случае точнее, «смешения языков».

Напомним, что онтология – это учение о сущем, но онтогенез – это почему-то индивидуальное развитие организма, хотя «корень» у этих слов один. Филогенез – это историческое развитие организмов, от «корня» phylon – племя, раса, род. Так что при переводе «плана выражения» в «план содержания» упомянутый закон звучит весьма органично, даже коллективистски: индивидуальное развитие организма повторяет историческое развитие организмов.

Попытаемся объяснить себе, почему план выражения закона Геккеля в контексте предшествующей эпохи мог подталкивать к рокировке двух «генезисов».

Прежде всего, в представлениях советского школьника, а потом студента онтогенез прочно ассоциировался с онтологией, которая, как мы уже знаем, изучает бытие. А уж первичность бытия по отношению ко всему остальному исключала какую бы то ни было возможность для онтогенеза быть чьим-то повторением (пусть даже быстрым и кратким).

Далее, по мере того, как «все выученное забывалось», «филогенез» дрейфовал в ту область памяти составителя, которая контролировалась филологией – «любовью к слову» и философией – «любовью к мудрости»[52], и в результате стал *генезисом слова*, так же, как его собрат «онтогенез» – *генезисом бытия*. Сомневаться в том, что первый определяется вторым, считалось дурным тоном.

Но ведь была же какая-то причина выбрать для рассматриваемого закона именно геккелевский план выражения?

Ответ на этот вопрос мы находим в самом начале главы 1 книги [Эко]:

«Творение происходит с помощью слова, и только именуя вещи, мало-помалу создаваемые, Бог придает им онтологический статус».

Нет, это вовсе не означает, что при смене эпох мы должны шарахаться от научных представлений к религиозным. Это означает только то, что во времена, к которым относится открытие закона Геккеля, Наука все еще должна была оглядываться на Церковь, что и нашло отражение в его чеканной, почти мистической формулировке, смешивающей phylon и philia...

2) Своим собственным примером книга [Эко] демонстрирует, насколько поучительной может оказаться сама попытка проследить развитие во времени одной-единственной темы, привлекавшей внимание исследователей в разные эпохи.

[52] Подобный дрейф был бы невозможен без филателии, филокартии, филумении и фалеристики (не говоря уже о вексиллологии).

«Подлинное сокровище всегда близко. Оно лежит, захороненное в самых сокровенных уголках нашего собственного дома – нашего собственного существа. Удивительный факт: внутренний голос, направляющий нас в поисках этого сокровища, может быть понят нами лишь после полного приключений путешествия в дальний край»[53].

Тема *Путешествия, Возвращения* и *Обретения,* сформулированная только что по следам М. Элиаде, является неиссякаемым источником сюжетов мировой литературы. Достаточно обратиться к авторам, книгам и героям, которые уже появлялись на наших страницах. «Мастер и Маргарита» и «Обитаемый остров» прямо посвящены этой теме. Толкианский эпос весь проникнут ею. Уайлдер написал «Норта» за два года до смерти – он просто навсегда вернулся в свое Прошлое... А мистерия «Приключений Буратино», с которой словно списан коэльовский «Алхимик»?!.

«Я вернулся!» – говорит Юрий Деточкин в последних кадрах фильма самому дорогому для него человеку... И даже фердыщенковский выгон – обозримый, но таинственный, как сам XVIII век, – своей концентрированной пустотой доводит эту тему до предельного воплощения...

Наверное, для того и понадобилось недавнее путешествие в Венецию времен Карло Гольдони, что в одной из предыдущих версий «проекта (22.1)» составитель попытался использовать «паттерн», восходящий к русской народной сказке «Теремок».

Реализация данного проекта «вдоль» указанного паттерна вызвала у ее автора ощущение сумбурности, нагроможденности и разнородности, даже искусственности. Чего-то явно не хватало. Автор уже собрался было стереть получившийся текст, когда ему на глаза попалась книга [Эко]. И с первых же страниц – одна из древнейших мистерий мировой культуры. Вавилонская башня! Вот что такое «Теремок»!

«Сумбурность, нагроможденность и разнородность, и даже искусственность» вдруг обрели смысл, став памятью о благородных руинах героического крушения, которое пережило человечество на заре своего развития. Но в этой памяти о «смешении языков» наши образы обретают собственный язык, а мы – самое настоящее сокровище, ожидавшее нас в сокровенном уголке нашего собственного дома – на книжной полке...

Книга [Эко] помогает нам выложить свою «дорогу из желтого кирпича»: мы разносим во времени план выражения (раздел 22) и план содержания (ниже). Она помогает разгребать структурные завалы погру-

[53] Сокращенная выписка из [Эли], с. 284–285.

жением в исторический контекст – ведь «за многими неутвердившимися проектами тянется шлейф благотворных последствий». Для размещения перспективных мифов как раз и существуют «белые пятна истории» – их вполне должно хватить.

Книжную серию, к которой принадлежит [Эко], ее составитель, Жак Ле Гофф, посвятил строительству Европы. Избрав руководящей метафорой строительство Вавилонской башни, Умберто Эко приветствует его, «даже если это будет история несгибаемого упорства, с которым преследуется несбыточная мечта».

Однако открывшиеся недавно новые проектные характеристики этой великой стройки тысячелетия просто обязывают нас – noblesse oblige – вопросить: каково место России в новом «смешении языков»? Вновь вот это –

«Она глядит, глядит, глядит в тебя
И с ненавистью, и с любовью...»?[54]

Составитель рад хотя бы немного обновить такое отношение несколькими штрихами, возвращая «подобному подобное» – актуарную математику, которая навсегда сохранит свое европейское платье, скроенное по «лекалам» своего вице-президента С.Е. Савича[55]. Или, если угодно, свой универсальный алфавит обозначений...

Тем не менее, пока российская культурная традиция еще как-то связана с европейской, надо успеть воспользоваться широкими возможностями последней в отношении выбора методологической базы.

Книга [Эко] дарит нам целый букет методологий – от магии до герменевтики и от мнемотехники до лейбницевской свободы комбинаций и аналогий.

Мы выбрали посильный для себя образ карнавала – и как народного гуляния после исполнения обязательного ритуала, и как возможность «скрыться под маской», и как удобный способ переходить от одной методологии к другой.

3) Указанием на «Теремок» в [Эко] может служить, в частности, легенда о даре царя скифов Дарию Великому, точнее, о «пяти царственных сло-

---

[54] *Александр Блок.* Скифы. Цит. по [Блок], с. 179.

[55] Напомним, что С.Е. Савич был вице-президентом первых четырех, а также седьмого Всемирных конгрессов актуариев.

вах», «которыми ответил царь скифов Идантура Дарию Великому, когда тот объявил ему войну: скиф предъявил лягушку, мышь, птицу, лемех плуга и лук со стрелами» (с. 172).

В интернетовских источниках вместо Идантуры фигурирует Иданфирс (Идантирс), лемех плуга и лук исчезают, зато появляется точное количество стрел – пять[56]. В такой версии количество «царственных слов» – даров скифского царя становится равным числу персонажей «Теремка», однако возникает проблема соответствия.

В пересказе Алексея Толстого [Тер] героями сказки являются муха, комар, мышка, лягушка, заяц, лиса, волк, а также медведь, играющий в сказке особую роль. Все звери вполне соответствуют не только представлениям о ландшафтах Скифии, но и перипетиям скифского похода Дария в описании Геродота. Простая справедливость требует от нас включить в «список Идантуры» также и зайца, который помог скифам выиграть последнюю битву «без единого выстрела».

«Теремок» – сказка-перевертыш. Финальная сцена может означать мнимую победу Дария: противник заставляет его сесть на горшок, который, оказавшись ложной целью, разваливается, а его обитатели разбегаются целыми и невредимыми.

Наоборот, заканчивающий сказку медведь может выступать и в качестве царя скифов, который давит персов – этого колосса на глиняных ногах – как обычный глиняный горшок. Роль приманки играют остальные звери, которых персы «поймали было», да не заметили главной опасности. Способ, каким медведь давит горшок, очень точно передает презрение скифов – именно так ситуацию прочитали персы, увидевшие, как их враги поворачиваются к ним спиной, переключаясь от битвы к охоте на зайца...

Сейчас самое время заняться интерпретациями в стиле раздела 22, однако, чтобы не усугублять конфронтации, сопутствующие переживаемому этапу упоминавшейся выше великой стройки, мы позволим себе пойти по скифскому пути, уводя наш сказочный карнавал к завершению «проекта (22.1)». Отметим лишь, что методологической базой отношения составителя к указанным конфронтациям является цитированная выше работа [Блок] с некоторыми уже упоминавшимися в главе II дополнениями из [Бул].

---

[56] См., например, http://ec-dejavu.ru/s/Scythian.html (фрагменты «Истории» Геродота, IV, 134).

4) Мы вступаем в «акматическую фазу» нашего проекта. Теремок превращается в дорожный сундук, который тащит только что спрятавший (туда) свою медвежью шкуру Труффальдино. Это и неудивительно, так как, судя по отдельным крупицам его рассказов и некоторым штрихам к его портрету, «Бергамские низины» XVIII века – типичный итальянский «медвежий край». С другой стороны, бергамец все время упоминает о каких-то своих вещах в сундуке хозяина.

Миссия Труффальдино – сделать так, чтобы в сундук одного хозяина попала вещь другого. Тогда «подобное притянется подобным», сундуки начнут распадаться, чтобы слиться в один... терем, в котором «жить-поживать и добра наживать» будут соединившие свои судьбы Флориндо и Беатриче. Таков филогенез, который мы сейчас еще раз (быстро и кратко) повторим в онтогенезе равенства (22.1).

В качестве канона для нашего последнего апокрифа изберем следующую тему из уже, наверное, основательно подзабытого «Биг-Бага» (с. 114-115). Тема эта связана с обоснованием формулы (22.3) методом, отличным от приведенного выше на рис. 2 и в комментариях к нему предельного перехода.

«Рассмотрим выражение A_x, обращаясь к его определению $E[Z]{=}E[v^{K(x)+1}]$. Для удобства читателя перепишем его в виде

$$A_x = E[Z] = E[v^{K(x)+1} \mid K(x) \geq 0],$$

хотя эта запись избыточна, поскольку вся вероятностная масса распределения случайной величины $K(x)$ сосредоточена на множестве неотрицательных целых чисел[57].

Величину $E[Z]$ можно вычислить, рассматривая событие, что лицо (x) умрет в первый год, т.е. $K(x)=0$, и его дополнение, событие, что лицо (x) переживет первый год, то есть $K(x)\geq 1$. Мы можем записать

$$E[Z]{=}E[v^{K(x)+1}|K(x){=}0]P[K(x){=}0]+E[v^{K(x)+1}|K(x){\geq}1]P[K(x){\geq}1]. \qquad (4.3.8)$$

В этом выражении мы можем сделать следующие очевидные замены:

[57] Возможность $T(x)<0$ в [Биг-Баг] не запрещена. Почему же тогда запрещается $K(x)=[T(x)]<0$? Кроме того, зачем было бы при изначальном запрете возможности $T(x)<0$ накладывать условие «$|\ X>x$», т.е. «$|\ T(x)>0$»?

$$E[v^{K(x)+1} \mid K(x)=0]=v,\ P[K(x)=0]=q_x \text{ и } P[K(x)\ge 1]=p_x.$$

Для того чтобы найти выражение для оставшегося сомножителя, перепишем его в виде

$$E[v^{K(x)+1} \mid K(x)\ge 1]=vE[v^{(K(x)-1)+1} \mid K(x)-1\ge 0].$$

Так как сл. в. $K(x)$ является пошаговой продолжительностью предстоящей жизни лица (x) при условии $K(x)\ge 1$, то сл. в. $K(x)-1$ должна быть пошаговой продолжительностью предстоящей жизни лица $(x+1)$.

Если мы хотим использовать те же вероятности для условного распределения сл. в. $K(x)-1$ при условии $K(x)\ge 1$, как если бы с самого начала рассматривалось лицо возраста $(x+1)$, мы можем написать

$$E[v^{(K(x)-1)+1} \mid K(x)-1\ge 0]=A_{x+1}$$

и, подставив эту величину в (4.3.8), получить

$$A_x = vq_x + vA_{x+1}p_x».$$

Цитата завершена. Читатель без труда распознает в приведенных выкладках торжество безусловного подхода. Одна из последующих новелл будет посвящена переносу этого сюжета в «условную реальность». Некоторые из новелл повторят венецианские сцены из прошлого раздела. А сейчас уколом давних воспоминаний на сцену вылетает

1. «*Комар-пискун*»[58] – доказательство формулы (22.2).

С использованием сокращенной формы ${}_k p_x = p_x \cdot {}_{k-1}p_{x+1}$ разложения ${}_k p_x$ в произведение «годичных дожитий» из раздела 9 – получаем

$$A^1_{x:\overline{n}|}=\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\,{}_k p_x q_{x+k} = vq_x + vp_x\sum_{k=1}^{n-1} v^k\,{}_{k-1}p_{x+1}q_{x+k} =$$

$$= vq_x + vp_x \sum_{j=1}^{n-2} v^{j+1}\,{}_j p_{x+1} q_{x+1+j} = vq_x + vp_x A^1_{x+1:\overline{n-1}|}.$$

Итак, формула (22.2) установлена «элементарными соображениями».

2. «*Муха-горюха*» –

[58] Названия этого и следующих подразделов заимствованы из [Тер].

Очень важная лемма. *Пусть T – случайная величина непрерывного типа на вероятностном пространстве Ω. Тогда вероятность*

$$P[\omega \in \Omega : T(\omega) = 0] = 0.$$

Доказательство получается медитацией над нижней половиной страницы 271 из [Бор]. Мы хотим доказать лемму «малой кровью» – не углубляясь в теорию меры и интеграла Лебега. Для этого нужно подобрать утверждение, с высот которого хотя бы видна «земля обетованная». Таким утверждением может служить теорема 2 из того места, над которым мы медитируем. Когда мы запишем эту теорему в удобной для нас форме, мы увидим то, что хотим.

Подхватываем из [Бор]: случайная величина T индуцирует вероятностное пространство с мерой P_T на прямой такой, что

$$P[\omega \in \Omega : T(\omega) \le t] = P_T((-\infty, t]) \equiv \int_{-\infty}^{t} f_T(t)dt.$$

Рассмотрим борелевскую функцию $g(t) = I_{\{0\}}(t)$ – индикатор одноточечного множества $\{0\} \subset \mathbf{R}$. Ее сравнение с функцией $I_{T=0}(\omega)$ – индикатором множества $\{\omega \in \Omega : T(\omega) = 0\}$ – показывает, что $g(T(\omega)) = I_{\{0\}}(T(\omega)) = I_{T=0}(\omega)$. Тогда вышеупомянутая теорема 2 дает

$$P[\omega \in \Omega : T(\omega) = 0] = E[I_{T=0}] = \int_{\Omega} I_{T=0}(\omega) dP(\omega) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} I_{\{0\}}(t) f_T(t)dt = f_T(0) \int_{-\infty}^{\infty} I_{\{0\}}(t)dt = 0;$$

первое равенство – это [Уит], с. 25, а вот второе и третье – это как раз теорема 2. Чтобы доказать последнее равенство, совершим в уме гигантский прыжок с лебеговских высей к римановской надежности: для любого $\varepsilon > 0$ будет

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_{\{0\}}(t)dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} I_{\{0\}}(t)dt \le 1 \cdot 2\varepsilon \to 0 \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0+.$$

Отметим, что случайная величина T – это наша старая знакомая, просто мы на время забыли про x и вывели на первый план зависимость от $\omega \in \Omega$.

Аналог *Очень важной леммы* для условной вероятности почти тривиален:

$$P(T=0 \mid X>x) = \frac{P(T=0 \text{ и } T>0)}{P(X>x)} = \frac{P(\varnothing)}{P(X>x)} = 0.$$

3. «*Волк-волчище – из-за куста хватыш*» – доказательство формулы (22.3) предельным переходом.

Проверим, что актуарная настоящая стоимость $A_x = E[Z \mid X>x]$, где $Z = v^{K(x)+1} I_{K(x)\ge 0} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} I_{K(x)=k}$, удовлетворяет рекуррентному соотношению (22.3). Такая проверка осуществляется «мгновенным прыжком» – предельным переходом при $n \to \infty$ в формуле (22.2), что и устанавливает (22.3) в силу

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_k p_x q_{x+k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, {}_k p_x q_{x+k} = \lim_{n\to\infty} A^{1}_{x:\overline{n}|}.$$

Теперь подготовимся к обоснованию формулы (22.3) другим способом.

4. «*Лягушка-квакушка и заюнок-кривоног*».

Напоминание: $Z = v^{K(x)+1} I_{K(x)\ge 0} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} I_{K(x)=k}$.

1) Ниже нам понадобится равенство $E[ZI_{X\le x}] = 0$. Докажем его:

$$E[ZI_{T\le 0}] = E[v^{K+1} I_{K\ge 0} I_{T\le 0}] = E[v^{K+1} I_{T=0}] = vE[I_{T=0}] = vP(T=0) = 0.$$

Здесь использовались *Очень важная лемма*, эквивалентность индикаторных условий $[T]\ge 0,\ T\le 0 \;\Leftrightarrow\; T=0$, а также очевидная импликация $T=0 \Rightarrow K=0$.

2) Обоснование равенства $E[Z] = E[ZI_{X>x}]$ еще проще:

$$E[Z] = E[ZI_{X>x}] + E[ZI_{X\le x}] = E[ZI_{X>x}].$$

Следующие два пункта демонстрируют эквивалентность условий «$|\,K \geq 0$» и «$|\,X > x$».

3) Имеет место равенство $P(K \geq 0) = P(X > x)$:

$$P(K \geq 0) = P([T] \geq 0) = P(T \geq 0) = P(T = 0) + P(T > 0) = P(X > x)$$

– согласно *Очень важной лемме*.

4) Справедливо соотношение $E[Z \mid X > x] = E[Z \mid K \geq 0]$:

$$E[Z \mid X > x] = \frac{E[ZI_{X>x}]}{P(X > x)} = \frac{E[Z]}{P(K \geq 0)} = E[Z \mid K \geq 0]$$

– в силу пп. 2) и 3).

5) Вот он – первый подступ к *Канону,* первая разведка боем после долгой штабной работы:

Лемма. $E[Z \mid X > x] = E[Z \mid K = 0]q_x + E[Z \mid K \geq 1]p_x$.

Доказательство. Имеем

$$E[Z \mid X > x] = \frac{E[Z]}{P(X > x)} =$$

$$= \frac{E[Z|K<0]P(K<0) + E[Z|K=0]P(K=0) + E[Z|K\geq 1]P(K\geq 1)}{P(X > x)}$$

– согласно [Уит], с. 93.

Вначале «отсеем» первое слагаемое в числителе последнего выражения. Действительно, если $P(K<0) = 0$, то оно отсеивается сразу, а если $P(K<0) > 0$, то – после очевидных преобразований:

$$E[Z|K<0] = \frac{E[v^{K+1}I_{K\geq 0}I_{K<0}]}{P(K<0)} = \frac{E[0]}{P(K<0)} = 0.$$

В итоге получаем равенство

$$E[Z \mid X > x] = E[Z|K=0]\frac{P(K=0)}{P(X > x)} + E[Z|K\geq 1]\frac{P(K\geq 1)}{P(X > x)}.$$

Фигурирующие в нем отношения оказываются соответствующими условными вероятностями:

$$\frac{P(K=0)}{P(X>x)}=\frac{P([T]=0)}{P(X>x)}=\frac{P([T]=0\,и\;T>0)}{P(T>0)}=P(K=0\,|\,X>x),$$
$$\frac{P(K\geq 1)}{P(X>x)}=\frac{P([T]\geq 1)}{P(X>x)}=\frac{P([T]\geq 1\,и\;T>0)}{P(T>0)}=P(K\geq 1\,|\,X>x).$$

Первая вероятность подсчитана в разделе 18: $P(K=0\,|\,X>x)=q_x$. Чтобы вычислить вторую, рассмотрим сумму

$$P(K=0\,|\,X>x)+P(K\geq 1\,|\,X>x)=P(K\geq 0\,|\,X>x),$$

равную единице согласно пункту 3) выше. Тогда

$$P(K\geq 1\,|\,X>x)=1-P(K=0\,|\,X>x)=1-q_x=p_x,$$

и лемма доказана.

Пункт 4) сразу дает такое

Следствие. $E[Z\,|\,K\geq 0]=E[Z\,|\,K=0]q_x+E[Z\,|\,K\geq 1]p_x$.

Интересно сравнить это равенство с «Биг-Баговским» (4.3.8)...

5. «*Лиса – при беседе краса*».

Цель настоящего подраздела – обоснование формулы (22.3) с помощью только что доказанной леммы, т.е., что называется, «на мягких лапах»[59]. Вычислим условные математические ожидания, остающиеся в правой части утверждаемого леммой соотношения.

Из определения Z следует, что $ZI_{K=0}=vI_{K=0}$, поэтому

$$E[Z\,|\,K=0]=\frac{E[ZI_{K=0}]}{P(K=0)}=\frac{vE[I_{K=0}]}{P(K=0)}=v.$$

[59] Образ подсказан в выступлении Н.Д. Солженицыной в вечерней программе «Вести» 30 августа 2014 г. о включении в ЕГЭ сочинения по литературе.

Теперь обратимся к $E[Z \mid K \geq 1]$. Имеем

$$E[Z \mid K \geq 1] = E[v^{K+1} I_{K\geq 0} \mid K \geq 1] = \frac{E[v^{K+1} I_{K\geq 0} I_{K\geq 1}]}{P(K \geq 1)} =$$

$$= \frac{E[v^{K+1} I_{K\geq 1} I_{K\geq 1}]}{P(K \geq 1)} = E[v^{K+1} I_{K\geq 1} \mid K \geq 1] =$$

$$= vE\left[v^{(K(x)-1)+1} I_{K(x)-1\geq 0} \mid K(x) - 1 \geq 0\right].$$

Ключевой момент: из определения $K(x)$ как целой части $T(x)$ следует, что $K(x) - 1 = K(x+1)$. Но тогда

$$E[Z \mid K \geq 1] = vE\left[v^{(K(x)-1)+1} I_{K(x)-1\geq 0} \mid K(x) - 1 \geq 0\right] = vA_{x+1}.$$

Итак, все комплектующие формулы (22.3) подготовлены, и данная формула вступает в действие второй раз.

6. «*...вам всем пригнётыш...*».

Мы, наконец, встречаемся с последним, самым эффектным персонажем нашего «Теремка» – вершителем его *истории*. Здесь, в окружении формул, словно свиты, этот персонаж представляет перед нами «махровый» *Матан* – так называют студенты математический анализ...

Благодаря этому в математику
вошли движение и диалектика...[60]

...– образ, как нельзя более актуальный в переживаемую нами ныне эпоху перемен. А уж как читатель прочтет этот образ – как матан или как диалектику – это уж его дело...

Наша цель – показать, что актуарная настоящая стоимость бессрочного страхования

$$B_x = \bar{A}_x \equiv \int_0^\infty v^t\, {}_t p_x \mu(x+t)dt$$

[60] *Энгельс Ф.* Диалектика природы. Цит. по [Энг], с. 30.

удовлетворяет соотношению (22.7) при одном дополнительном предположении, которое откроется нам позднее.

Итак,

$$\bar{A}_x = \int_0^1 v^t\, {}_t p_x \mu(x+t)dt + \int_1^\infty v^t\, {}_t p_x \mu(x+t)dt .$$

Первый интеграл равен $\bar{A}_{x:\overline{1}|}$, во втором делаем замену переменной $s = t-1$. Получаем

$$\bar{A}_x = \bar{A}_{x:\overline{1}|} + v\int_0^\infty v^s\, {}_{s+1} p_x \mu(x+s+1)ds .$$

Воспользовавшись формулой ${}_{s+1}p_x = p_x \cdot {}_s p_{x+1}$, которую уже проще доказать, чем искать ссылку, окончательно имеем

$$\bar{A}_x = \bar{A}_{x:\overline{1}|} + vp_x \int_0^\infty v^s\, {}_s p_{x+1} \mu(x+s+1)ds = \bar{A}_{x:\overline{1}|} + vp_x \bar{A}_{x+1} .$$

– Помилуйте! – возопит посчитавший себя обманутым читатель. – Но где же обещанная формула (22.6')? Что вы нам подсовываете?

И вот тут-то и вступает в бой «резерв Господа Бога» – Его Величество Случай. Забытый персонаж «Теремка» – *мышка-погрызуха,* древний тотем интерполяции – прогрызает дыру в реальности...

Вспомним бессмертные строки:

«...Ход был все ѝже и ѝже. Буратино теперь едва протискивался под землей... И вдруг вниз головой полетел в подполье.

Там он едва не попал в крысоловку, наступил на хвост ужу̀, только что напившемуся молока из кувшина в столовой, и через кошачий лаз выскочил на лужайку.

Над лазоревыми цветами бесшумно летала мышь.

– За мной, Буратино, в Страну Дураков!..»[61]

Несомненно, это линейная интерполяция, самая простая и действенная. Последуем данному совету и воспользуемся указанной интер-

[61] *Толстой А.Н.* Золотой ключик. Цит. по [Тол], с. 58.

поляцией: ${}_t p_x \mu(x+t) = q_x$, $0 \le t \le 1$, $x = 0,1,2,\dots$. Предварительно вновь распакуем выражение для $\bar{A}_{x:\overline{1|}}$:

$$\bar{A}_x = \int_0^1 v^t \, {}_t p_x \mu(x+t) dt + v p_x \bar{A}_{x+1} = q_x \int_0^1 v^t dt + v p_x \bar{A}_{x+1} = \frac{i}{\delta} v q_x + v p_x \bar{A}_{x+1}.$$

Здесь применяется соотношение (20.1), из которого следует, что $\ln v = -\delta$ и $v - 1 = -iv$.

Мы, наконец, доказали, что для АНС $B_x = \bar{A}_x$ выполняется соотношение (22.7). Умножая (22.3) на i/δ, получим, что соотношению (22.7) удовлетворяет и величина $B_x = \dfrac{i}{\delta} A_x$. Осталось сделать решающий шаг.

«...Тойво Глумов мог бы и сам все это мне сформулировать, но, с его точки зрения, это было бы нарушением служебной этики и принципа «сяо». Делать такие выводы – прерогатива руководителя и старшего в клане...»[62].

Поэтому передадим слово «Биг-Багу», напоминая читателю, что «повторенье – мать ученья» (см. раздел 22). Рассмотрим соотношения (22.3') и (22.6'). Поскольку они «выражают одну и ту же рекуррентную формулу, имеют одинаковую область изменения x и одинаковые начальные значения 0 в точке ω, величина $(i/\delta)A_x$ является решением для (22.6') и

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x \text{»}.$$

Итак, формула (22.1) установлена, и на душе почему-то стало пусто. На прощание приведем следующее

Упражнение. Докажите равенство

$$E[v^T I_{T>0}] = \int_0^\infty v^t f_T(t) dt .$$

Это напомнит нам о *мухе-горюхе*...

---

[62] *Братья Стругацкие.* Волны гасят ветер. Цит. по [АБС], с. 489.

24. Цветы для Чарли Гордона,

или

«Туда и обратно»

У всего есть «обратная сторона Луны». Она есть и у *обретения сокровища в сокровенных уголках собственного существа.* Это когда не хочется возвращаться. Или наоборот, хочется вернуться, но только в прошлое.

Вспомним «Цветы для Элджернона»[63]. Главному герою рассказа, умственно отсталому парню Чарли Гордону врачи делают операцию, и он становится гением, но... ненадолго. Успевая, впрочем, построить математическую модель этого «ненадолго» – *исчисление интеллекта* – благодаря наблюдениям за своим предшественником по эксперименту, мышонком по имени Элджернон.

После возвращения к «привычному» образу жизни фабричного уборщика Чарли, тем не менее, понимает, что так жить больше не сможет. Он научился разбираться в людях, понял себя и обрел свое сокровенное – память о пути к свету. «Я узнал много разных вещей, а раньше я никогда даже не знал, что они есть на свете, и я благодарен за то, что хоть на минутку это увидел».

Обретение сокровенного часто встречается в книгах. Выше мы уже приводили примеры. Но там был все-таки Рай. А здесь, в рассказе про Чарли – это все-таки Ад. Жизнь после жизни. Звездный час, обратившийся в свою противоположность. Если представить себе цельный образ, то это – всплеск. Отчаянный, из последних сил, словно на едином дыхании рывок из тьмы к свету и... обратное падение во тьму. Это и была, наверное, Вавилонская башня. Рассыпавшаяся на мириады кусков, чтобы каждый хотя бы попытался попробовать...

Все это, конечно, так, если, подобно Лейбницу, мыслить себя в «царстве предустановленной гармонии» ([Эко], с. 291). А если нет, то нас поджидает «Собачье сердце», которое будет «обратной стороной Луны» у только что обнаруженного Ада[64].

....

---

[63] *Дэниел Киз.* Цветы для Элджернона. См. [Киз].

[64] Скорбный пафос отзвучавшей увертюры навеян выступлением 21 сентября в программе «Город» одного, как сказал бы П.П. Бажов, «молодого, но дельного доктора» из местной психиатрической больницы, который увлеченно рассказывал телезрителям о болезни Альцгеймера.

Следующий – видимо, последний – сюжет нашей книги будет связан с получением, а потом решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx}\bar{A}_x = -\mu(x) + \bar{A}_x[\mu(x) + \delta].$$

Отсюда и название – «туда и обратно». Получение этого уравнения напомнит нам вывод формулы (22.3) из пп. 4 и 5 предыдущего раздела – так же, как и там, здесь будет использоваться техника условных математических ожиданий.

Начнем с представления

$$\bar{A}_x = \frac{E[v^T I_{T>0}]}{P(X > x)}.$$

Как и выше, числитель раскладывается в сумму трех слагаемых. Поскольку запись этой суммы оказывается слишком длинной, покажем, что ее первое слагаемое равно нулю.

Действительно, если $P(T \le 0) = 0$, то $E[v^T I_{T>0} \,|\, T \le 0]P(T \le 0) = 0$. Если же $P(T \le 0) \ne 0$, то

$$E[v^T I_{T>0} \,|\, T \le 0]P(T \le 0) =$$

$$= \frac{E[v^T I_{T>0} I_{T\le 0}]}{P(T \le 0)} P(T \le 0) = E[v^T I_{T>0} I_{T\le 0}] = E[0] = 0.$$

Таким образом, можно записать

$$\bar{A}_x = \frac{E[v^T I_{T>0} \,|\, 0 < T \le h]P(0 < T \le h) + E[v^T I_{T>0} \,|\, T > h]P(T > h)}{P(X > x)},$$

где h – произвольное положительное число.

Легко показать, что

$$\frac{P(0 < T \le h)}{P(X > x)} = P(0 < T \le h \,|\, X > x) = {}_h q_x,$$

$$\frac{P(T > h)}{P(X > x)} = P(T > h \mid X > x) = {}_h p_x .$$

Поэтому

$$\bar{A}_x = E[v^T I_{T>0} \mid 0 < T \le h]\, {}_h q_x + E[v^T I_{T>0} \mid T > h]\, {}_h p_x ,$$

и остается вычислить фигурирующие в этом равенстве условные математические ожидания. Имеем

$$E[v^T I_{T>0} \mid 0 < T \le h] = \frac{E[v^T I_{T>0} I_{0<T\le h}]}{P(0 < T \le h)} =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v^t I_{(0,h]}(t) f_T(t) dt}{P(0 < T \le h)} = \int_0^h v^t \frac{f_T(t)}{P(0 < T \le h)} dt ,$$

а так как

$$f_T(t) = f_T(t \mid X > x) P(X > x) = {}_t p_x \mu(x+t) P(X > x)$$

и

$$P(0 < T \le h) = P(0 < T \le h \mid X > x) P(X > x) = {}_h q_x P(X > x) ,$$

то

$$E[v^T I_{T>0} \mid 0 < T \le h] = \frac{1}{{}_h q_x} \int_0^h v^t\, {}_t p_x \mu(x+t) dt .$$

Далее,

$$E[v^T I_{T>0} \mid T > h] = \frac{E[v^T I_{T>h}]}{P(T > h)} = E[v^T \mid T > h] =$$

$$= v^h E[v^{T-h} \mid T - h > 0] = v^h E[v^{T(x)-h} \mid T(x) - h > 0] .$$

Как легко проверить, $T(x) - h = T(x+h)$. Поэтому

$$E[v^T I_{T>0} \mid T > h] = v^h E[v^{T(x+h)} \mid T(x+h) > 0] = v^h \bar{A}_{x+h} .$$

Подстрахуемся: проверим равенство

$$E[v^{T(x)-h} \mid T(x) - h > 0] = \bar{A}_{x+h} ,$$

так сказать, непосредственно. Или, как иногда говорят, по-рабоче-крестьянски. Имеем

$$E[v^{T-h} \mid T-h>0] = \frac{E[v^{T-h} I_{T-h>0}]}{P(T-h>0)} = \frac{\int_h^\infty v^{t-h} f_T(t)dt}{P(X>x+h)} =$$

$$= \int_h^\infty v^{t-h} \frac{f_T(t \mid X>x)}{P(X>x+h \mid X>x)} dt = \int_h^\infty v^{t-h} \frac{{}_t p_x \mu(x+t)}{{}_h p_x} dt =$$

$$= \int_0^\infty v^\tau \frac{{}_{h+\tau} p_x}{{}_h p_x} \mu(x+h+\tau) d\tau = \int_0^\infty v^\tau \frac{s(x+h+\tau)}{s(x+h)} \mu(x+h+\tau) d\tau =$$

$$= \int_0^\infty v^\tau \, {}_\tau p_{x+h} \mu(x+h+\tau) d\tau = \bar{A}_{x+h} \,.$$

Проверили!

Итак, имеет место соотношение

$$\bar{A}_x = \int_0^h v^t \, {}_t p_x \mu(x+t) dt + v^h \bar{A}_{x+h} \, {}_h p_x \qquad (23.1)$$

– аналог рекуррентной формулы (22.6'). Теперь нам нужно получить из «разностного» уравнения (23.1) уравнение дифференциальное.

Как метко замечает «Биг-Баг» на странице 125, умножая обе части формулы (23.1) на -1, прибавляя к ним $\bar{A}_{x+h}$ и деля на h, мы получаем соотношение

$$\frac{\bar{A}_{x+h} - \bar{A}_x}{h} = -\frac{1}{h} \int_0^h v^t \, {}_t p_x \mu(x+t) dt + \bar{A}_{x+h} \frac{1 - v^h \, {}_h p_x}{h} . \qquad (23.2)$$

Теперь уже действительно все просто – надо перейти к пределу при $h \to 0$ в формуле (23.2). Слева получится производная актуарной стоимости $\bar{A}_x$, а справа – комбинация величин

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h v^t\,{}_tp_x\mu(x+t)dt=\frac{d}{ds}\int_0^s v^t\,{}_tp_x\mu(x+t)dt\Big|_{s=0}=\mu(x)$$

и

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-v^h\,{}_hp_x}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{v^h\,{}_hp_x-v^0\,{}_0p_x}{h}=-\frac{d}{dt}(v^t\,{}_tp_x)\Big|_{t=0}=$$

$$=\left[-v^t\frac{d}{dt}\,{}_tp_x-(v^t\ln v)\,{}_tp_x\right]\Big|_{t=0}=\mu(x)+\delta;$$

здесь мы использовали уже давно забытый п. 4) раздела 7 и равенство $\ln\delta=-v$, см. (20.1). Итог:

$$\frac{d}{dx}\bar{A}_x=-\mu(x)+\bar{A}_x[\mu(x)+\delta] \tag{23.3}$$

(выше мы забыли пронумеровать это выражение, поэтому и пришлось его переписывать).

По сравнению с двумя предыдущими «ударными» разделами саундтрек здесь заметно приглушен. Мы просто тихо наслаждаемся магией условности.

Читатель, наверное, давно уже заметил, что мы давно не давали ему никаких заданий. Составитель заметил это только сейчас. Поэтому приведем пару заданий из [Биг-Баг], с. 128, непосредственно связанных с содержанием данного раздела.

Задания. 1. (Задача 4.21.)

(a) Покажите, что соотношение $\bar{A}_x=\int_0^\infty v^t\,{}_tp_x\mu(x+t)dt$ можно переписать в виде

$$\bar{A}_x=\frac{1}{{}_xp_0v^x}\int_x^\infty v^y\,{}_yp_0\mu(y)dy,\ x\ge 0.$$

(b) Продифференцируйте формулу п. (a), чтобы получить соотношение (23.3).

(c) Воспользовавшись той же техникой, покажите, что

$$\frac{d}{dx}\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = [\mu(x)+\delta]\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + \mu(x+n)\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} - \mu(x),\ x \geq 0.$$

В этот самый момент заканчивается подраздел «Туда». Нам не хочется «Обратно», поэтому одноименный подраздел скроем в следующем, самом последнем задании.

2. (Задача 4.22.)

Решите дифференциальное уравнение (23.3) следующими способами:

(a) используйте интегрирующий множитель $\exp[-\int_y^x [\delta+\mu(z)]dz]$, чтобы получить $\bar{A}_x = \int_y^\infty \mu(x)\exp\ -\int_y^x [\delta+\mu(z)]dz\ dx$,

(b) используйте интегрирующий множитель $e^{-\delta x}$, чтобы получить $\bar{A}_x = \int_y^\infty \mu(x)v^{x-y}(1-\bar{A}_x)dx$.

....

Настоящий раздел задумывался и, надеемся, выглядит как носитель фазы остывания[65] текста после «итальянских войн» и «персидских походов». Введение в научный текст драматургии – сначала кажущейся чуждой, а потом начинающей предъявлять на него свои права – это не только дань «нарративной» установке Лиотара – Джеймсона (см., напр., [Ка], с. 10[66]): «мир может быть познан только в форме "литературного" дискурса». Это еще и оберег – и *прежде всего* оберег – подобный тем, которые мы открыли для себя в разделе 18 (а потом в разделе 19) и которые он разворачивает до уровня щита. *Щита Одиссея?..*

Составителя «не устает удивлять тот факт», насколько медленно насыщается «рынок литературы» по актуарным расчетам страхования жизни – в отличие, например, от страхования имущества. Понятно, что «цена» человеческой жизни «за эти годы» заметно снизилась, а страхование ответственности долгое время было трудным для понимания, как

---

[65] Акматика, остывание и т.д. – этапы развития этноса по Л.Н. Гумилеву (см., напр., [Гум]). Здесь используются как метафоры.

[66] На самом деле надо ссылаться на [Иль], с. 4, 217. Тактику использования «ссылок-посредников» в виде собственных работ мы подглядели у [Фал].

говорят, «в принципе». Но дело, думается, не только в этом. Как уже отмечалось выше, актуарная математика страхования жизни – это исчисление смерти, а сколько бы человек ни отмежевывался от суеверий, именно им он, в конечном счете, и следует.

Можно высказать в чем-то спорное предположение о том, что традиционно наделяемый звериным чутьем феномен под названием «российский бизнес» на инфернальном уровне своего восприятия чувствует опасность, исходящую от продуктов вековой жизнедеятельности западных актуарных «ботаников», и инстинктивно сторонится их. Как ускользнул Щекн из «муравейника», поняв, что Лев Абалкин больше не человек. Как сторонятся скотомогильников или свалок ядерных отходов.

Коль скоро упомянутый бизнес избегает встречи с опасностью – значит, она иррациональна. Ритуальные обереги еще не сформировались, а опыт Запада, даже если когда-нибудь и откроется нам, то сможет ли пригодиться? Поэтому приходится двигаться очень медленно, сразу же упаковывая опасные находки в замкнутые «хронотопы». Поэтому и «седьмая печать», и «девятые врата», и «пятый элемент». Чтобы даже совсем молодой человек мог сказать... Впрочем, не будем торопиться – перечитаем еще раз...

«...– Ты что читаешь? – спросила я.

Аттикус заглянул на обложку.

– Это книга Джима. Называется «Серое привидение».

Сон мигом соскочил с меня.

– А почему ты ее взял?

– Сам не знаю, дружок. Просто подвернулась под руку. Раньше мне как-то не пришлось ее читать, – обстоятельно ответил Аттикус.

– Почитай, пожалуйста, вслух. Она очень страшная.

– Незачем, – сказал Аттикус. – Пока что хватит с тебя страхов. Это слишком...

– Аттикус, так ведь я не испугалась.

Он поднял брови.

– Ну да, я испугалась, только когда стала про все рассказывать мистеру Тейту. И Джим не испугался. Я его спросила, и он сказал – не боится.

И потом, **настоящее страшное бывает только в книгах**...»[67].

....

[67] *Харпер Ли.* Убить пересмешника. Цит. по [Ли], с. 277.

25. Последняя контрольная

(*Вместо послесловия*)

> В последнюю осень ни строчки, ни вздоха.
> Последние песни осыпались летом.
> Прощальным костром догорает эпоха,
> И мы наблюдаем за тенью и светом...
>
> *Юрий Шевчук*

Один раз составитель дал студентам эту контрольную на самом первом занятии. И что бы вы думали? Решили все без исключения! Зачем тогда и огород городить с каким-то лекционным курсом, если итоговую контрольную можно написать на самом первом занятии?

Подобные «независимые испытания» учат проще относиться к вещам, которые мы почитаем сложными...

Итак, последняя контрольная – «последняя контра».

В качестве заданий использованы пример 2.5.1 на с. 55-56 и пример 4.2.3 на с. 102-103 из «Биг-Бага». Таблицы не нумеруем.

Задание 1. Компания, занимающаяся страхованием жизни, предлагает договор страхования на случай смерти на срок один год с выплатами размера 1 и 2 единиц лицам, вероятности смерти которых составляют 0,02 или 0,10. Приводимая ниже таблица показывает число лиц n_k в каждом из четырех классов, образованных в соответствии с выплатой b_k и вероятностью наступления страхового случая q_k:

k	q_k	b_k	n_k
1	0,02	1	500
2	0,02	2	500
3	0,10	1	300
4	0,10	2	500

Страховая компания хочет собрать с этой группы из 1800 лиц сумму, достаточную для выплат с вероятностью 0,95. При этом компания стремится увеличить долю каждого лица в этой сумме до уровня, пропорционального ожидаемому размеру страховой выплаты для данного лица. Требуемая сумма имеет вид $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_{1800}$, где X_j – доля j-го лица. Согласно стратегии компании доля X_j не должна превосходить величины $(1+\theta)E[X_j]$, где $E[X_j]$ – ожидаемый размер выплаты j-му лицу. Величина $\theta E[X_j]$ является *рисковой надбавкой*, а θ называется *относительной рисковой надбавкой.*

Задача состоит в том, чтобы подсчитать относительную рисковую надбавку θ.

Порядок решения. Страховой портфель по данному договору страхования суммирует условия $X_j \le (1+\theta)E[X_j]$, $j=1,\ldots,1800$, до ограничения на итоговую сумму: $S \le (1+\theta)E(S)$.

Сумма S с таким ограничением достаточна для выплат с вероятностью 0,95 тогда и только тогда, когда $P(S \le (1+\theta)E(S)) = 0,95$. Из последнего соотношения и определяется θ. Делается это так. Поскольку

$$S \le (1+\theta)E(S) \Leftrightarrow \frac{S-E(S)}{\sqrt{D(S)}} \le \frac{\theta E(S)}{\sqrt{D(S)}},$$

то θ определяется из уравнения

$$\Phi\left(\frac{\theta E(S)}{\sqrt{D(S)}}\right) = 0,95,$$

откуда

$$\frac{\theta E(S)}{\sqrt{D(S)}} = 1,645;$$

Φ – функция стандартного нормального распределения. (В этом месте обязательно нужно упомянуть о таблицах нормального распределения.)

Остается лишь подсчитать среднее $E(S)$ и дисперсию $D(S)$ случайной величины S и найти θ. Для четырех классов, на которые разбиты страхователи, получаем результаты, которые последовательно записываем в таблицу со следующими колонками:

k	q_k	b_k	$b_k q_k$	$q_k(1-q_k)$	$b_k^2 q_k(1-q_k)$	n_k	$b_k q_k n_k$	$b_k^2 q_k(1-q_k)n_k$
1	0,02	1	0,02	0,0196	0,0196	500	10	9,8
2	0,02	2	0,04	0,0196	0,0784	500	20	39,2
3	0,10	1	0,10	0,09	0,0900	300	30	27
4	0,10	2	0,20	0,09	0,3600	500	100	180

Тогда будем иметь

$$E(S) = \sum_{j=1}^{1800} E(X_j) = \sum_{k=1}^{4} b_k q_k n_k = 160,$$

$$D(S) = \sum_{j=1}^{1800} D(X_j) = \sum_{k=1}^{4} b_k^2 q_k (1-q_k) n_k = 256$$

и

$$\theta = 1{,}645 \cdot \frac{\sqrt{D(S)}}{E(S)} = 1{,}645 \cdot \frac{16}{160} = 0{,}1645.$$

Задание 2. Определение величины начального инвестиционного фонда для портфеля страховых договоров.

Каждое из 100 независимых лиц имеет возраст x, подвержено постоянной интенсивности смертности $\mu = 0{,}04$ и заключило договор бессрочного страхования на случай смерти с выплатой $N = 10$ единиц в момент смерти. Страховые выплаты производятся из средств формируемого таким образом инвестиционного фонда, причем интенсивность начисления процента равна $\delta = 0{,}06$.

Рассчитать минимальную величину фонда h в момент времени $t = 0$, чтобы средств для страховых выплат на случай смерти каждого из страхователей оказалось достаточно с вероятностью примерно 0,95.

Порядок решения:

Считаем, что страхователи каким-либо образом перенумерованы, например, номерами заключенных с ними договоров. Тогда в момент времени $t = 0$ современная стоимость предстоящих выплат равна $S = \sum_{j=1}^{100} W_j$, где W_j – современная стоимость в момент времени $t = 0$ той выплаты, которую придется произвести в момент смерти лица с номером *j*. Имеем $W_j = 10Z$, где $Z = v^T$ – современная стоимость бессрочного страхования на случай смерти с выплатой размера 1. Тогда соответствующая актуарная современная стоимость равна

$$\bar{A}_x = \frac{\mu}{\mu + \delta} = 0{,}4,$$

а соответствующий второй момент –

$${}^2\bar{A}_x = E[Z^2 \mid X > x] = \frac{\mu}{\mu + 2\delta} = 0{,}25.$$

Таким образом, для любого j получим

$$E[W_j \mid X > x] = N \cdot \bar{A}_x = 10 \cdot 0{,}4 = 4,$$

$$E[W_j^2 \mid X > x] = N^2 \cdot {}^2\bar{A}_x = 100 \cdot 0{,}25 = 25$$

и

$$D[W_j \mid X > x] = E[W_j^2 \mid X > x] - (E[W_j \mid X > x])^2 = 25 - 16 = 9.$$

В итоге условные среднее и дисперсия S равны, соответственно, $E[S \mid X > x] = 100 \cdot E[W \mid X > x] = 400$ и $D[S \mid X > x] = 100 \cdot D[W \mid X > x] = 900$, где W – любая из величин W_j.

Величина h определяется из соотношения $P[S \le h \mid X > x] = 0{,}95$. Так как

$$S \le h \Leftrightarrow \frac{S - E[S \mid X > x]}{\sqrt{D[S \mid X > x]}} \le \frac{h - 400}{30},$$

то вышеуказанное соотношение, определяющее h, можно заменить уравнением

$$\Phi\left(\frac{h - 400}{30}\right) = 0{,}95,$$

где Φ – функция стандартного нормального распределения. Из таблицы нормального распределения получаем

$$\frac{h - 400}{30} = 1{,}645,$$

откуда $h = 449{,}35$.

Вот такая контрольная. Следует отметить, что упоминавшееся в конце раздела 24 медленное насыщение российского рынка литературы по актуарным расчетам страхования жизни здесь использовано «на все сто». Читатель может насытить данный тезис своим содержанием. В частности, нам нужна только формула АНС бессрочного страхования на случай смерти с постоянной интенсивностью смертности. Все остальное – это «сугубая» теория вероятностей, способная задать достойный контекст для актуарных задач и в советское время, если бы это потребовалось.

На этом мы прощаемся с формулами, вычислениями и доказательствами. Но *магия актуарности* пока не отпускает нас, ожидая соблюдения последнего ритуала.

Эпилог

> ...Палдобар в своем уделе научил
> человека тому, что умел, наказав:
> – Не называй то, чем дорожишь.
> И Модрубар в своем уделе научил
> человека тому, чем владел, обязав:
> – Бойся вещей без изъяна...
>
> *Павел Крусанов.* Укус ангела[68]

Еще раз вспомним Льва Гумилева, чтобы пропустить фазу обскурации – ведь на дворе золотая осень...

Так о чем, собственно, эта книга?[69] И зачем она нужна?

Пригодится ли она практикующим актуариям? Навряд ли – у них там, наверное, все конкретно – во всех смыслах этого богатого на нюансы слова. Нужна ли она преподавателям страхового дела? Зачем, если, наверное, уже давно есть справочники?.. Читатель может подумать, что в этих «наверное» таится какая-то надежда. Нет, это мы так устанавливаем дистанцию...

В свое время (1990-е гг.) бытовало поверье, что актуарные расчеты нужны страховой фирме исключительно для респектабельности: во-первых, без них не давал лицензию Росстрахнадзор, во-вторых, актуарно рассчитываемая нетто-премия составляла столь мизерную долю в рыночно складывающейся стоимости полиса, что и говорить-то об этом было неприлично. Тем не менее, обрывочные сведения девяностых о страховой математике вызывали у слушателей тех лет осторожный энтузиазм: «высокая наука» оказалась столь же недоступной, как и «лучшие дома Лондóна и Парижа»[70], и упоминание о первой питало иллюзии в отношении вторых.

Но если сказать, что мы посвятили свою книгу наведению лоска на классическую актуарную теорию и приданию ей респекта в условиях «диктата общественной практики», то этому никто не поверит, и прежде

---

[68] Цит. по [Кру], с. 74-75.

[69] «Да ни о чем!» – этот напрашивающийся легкомысленный «прикол» мы позже представим в более драматичной форме...

[70] Данную крылатую фразу принято приписывать О. Бендеру, но, во-первых, он говорил о Филадельфии, а во-вторых, избранная нами эгида подсказывает нам сослаться на лихого контрразведчика Бекаса из к/ф «Ошибка резидента».

всего мы сами. Это слишком трогательно. Актуально только то, что самоценно – таков беспощадный урок современности.

Какие же «внутренние стимулы» могут заставить человека если не вдохновиться актуарной математикой, то хотя бы попытаться изучить ее?

Мы исходим, разумеется, из примата бодрствующего разума над спящим. Это означает, что нас не «убаюкивают» формулы, их эстетика или связи (довольно нетривиальные) с другими дисциплинами – за всеми этими «рутинами» и «удовольствиями» мы неустанно и непреклонно заставляем себя видеть смерть, которую они обозначают или пытаются «просчитать».

Но смерть не может быть идеалом или смыслом творчества – она в лучшем случае его инструмент. Тема рока, столь сладостная для романтиков. «Закономерная случайность», убедить в существовании которой составляет искусство реализма. «Затравка» для интриги, нарушающей гармоничное равновесие, восстановлению которого посвящает себя классический сюжет. Конец, середина и начало – поистине, смерть равномерно распределена по стилям и направлениям – для изучения страстей человеческих.

Радость юности не распознает конца существования, она не понимает его. Алмазом по оконному стеклу можно писать, если только видишь за этим окном безграничное будущее, в которое тебе еще предстоит выйти. Математика юности не может быть актуарной – это математика животворящих форм и порождающих жизнь энергий...

Со временем смерть из отдельной, грозной, но далекой (вереница членов Политбюро) становится всесокрушающей, забирая с собой тех, кто привел тебя в этот мир, и навсегда разделяя жизнь на «до» и «после». Печаль разрушает творчество, заменяя его химерами, когда, цепляясь за ускользающее будущее, ты начинаешь доказывать ему свое существование. Но оно еще не актуарно – ты еще не смирился с потерями, а только они и могут пробудить чувство *прошлого*...

...Тот алмаз давно утерян – да и был ли он? – а в разбитое окно дует холодный ветер...

Поток, уносящий в небытие коллег, соседей, ровесников, уже нельзя не замечать – не замечаешь только, как становишься на путь ритуала. Статистика, психология и другие «виды лжи» более не интересны. Интересна только неумолимость приближающегося конца. Он *достоверен,* несмотря на свою откровенно индуктивную логику! Ты обретаешь опору в жизни, которой становится твое собственное прошлое и чувство долга перед этим прошлым.

Радость, печаль и долг – вот этапы жизненного цикла одной, отдельно взятой «экзистенции». Но только на последнем возникает тот самый actuarius – писец, счетовод, интендант, регистратор, даже врач – словом, хранитель, миссия которого – провожая прошлое, заводить часы жизни, чтобы мир продолжал существовать...[71]

Коль скоро даже эпилог имеет право на собственный циферблат, мы рискнем выбраться через наше разбитое окно, чтобы поприветствовать трех товарищей, которых можно с полным правом назвать хранителями своей эпохи. Это Эркюль Пуаро, комиссар Мегрэ и подполковник Петренко («Мухомор»).

Необычайно трудно – если вообще возможно – угадать их место на «классической русской шкале между Гамлетом и Дон Кихотом». «Проще на рулетке», – нашептывает лукавый, но оказывается только в том и прав, что этим людям приходилось неоднократно рисковать.

Все трое пришли в историю уже глубоко зрелыми людьми. Леди Агата и Жорж Сименон подарили своим героям вторую жизнь после первой, а прозвище «Мухомор» говорит само за себя. «Нависающая» над ними эсхатология дает всем троим не только способность провидеть переплетения пороков и страданий – она дает им право судить и решать судьбы людей. «Бог – не Ерошка, видит немножко», – говорит Петренко, подводя итог одному из тех знаменательных совпадений, которые обыватель приписывает высшим силам, и говорит словно от имени этих самых сил.

Нареченный именем Геракла и пришедший в мир повторить его подвиги, Пуаро неустанно чистит авгиевы конюшни английской рациональности, погружая островной оптимизм в печаль континентальной предопределенности, связывающей разрозненную мозаику преступления в единую картину. Пуаро словно построен на контрастах со своими *alter ego* – и «внутри», и «вне» своего сериала: обладая достоинствами рыцаря, он отказывается от рыцарской атрибутики в пользу бравого Гастингса; демонстрируя старомодность и викторианскую галантность, передает ставшие ему ненужными воспоминания молодости в распоряжение мисс Марпл.

[71] Кредо актуария мистически точно выписано в «Сказке о часах» Людмилы Петрушевской; см., например, [Пет].

Погружением занят и Мегрэ, но он не контрастен – он органичен своему миру, хотя отстранен и самодостаточен, как император. Действительно, названный в честь Цезаря, Мегрэ становится королем ускользающей Франции – истинным хозяином Чрева Парижа и Двора Чудес – своего рода Гарун аль-Рашидом, странствующим властителем, который наводит порядок в своих владениях, умея растворяться в них. Поэтому он никогда не произносит своего имени – и в ответ ему рано или поздно открываются чужие. В отличие от Пуаро, которому нужна публика, комиссар Мегрэ всегда один, дискурс его сериала – *исповедь*, он исповедует своих «подданных», пытаясь очистить их души. Пуаро пресекает «право на преступление», облегчая людям их выбор – Мегрэ пытается облегчить их участь перед лицом неизбежности, исключающей всякий выбор...

«Печалью последнего дня» проникнуты многие полицейские истории...

«...Полицейские истории! Какое понятие вы имеете обо всем этом, сударь? Займитесь вашими мушкетерами и не сбивайте меня с толку!..»

Действительно, «Улицы разбитых фонарей» проникнуты эсхатологией девяностых, которая только сейчас начинает проявляться на их фоне как завершение *эры милосердия.* Когда плоды победы добра над злом присваивает себе другое зло...

Благодаря уже своей собственной – и в то же время народной (хронически предпенсионной) – эсхатологии подполковник Петренко сумел продолжить советскую милицейскую традицию в новую реальность – и сохранить свою «великолепную семерку», помочь ей врасти в новое развитие под эгидой своей советскости. Как системная целостность или, лучше сказать, как орудие милосердия убойный отдел «Фонарей» складывался по крупицам из неистребимого отечественного оптимизма; эти крупицы моментально схватывались столь же неистребимой отечественной тягой к предопределенности.

Петренко действует на контрасте со своими подчиненными, как Пуаро, но отстранен и самодостаточен, как Мегрэ. Его миссия – любой ценой продолжить в будущее ту самую традицию, даже если будущего у нее нет. Своим показным «занудством» он только оттеняет молодость и творческую фантазию своих офицеров, до последнего оттягивая их столкновение с актуарностью существования, которой сам проникнут в полной мере. Он словно сознательно устраняется, лишь изредка (но эффектно) демонстрируя «мастер-класс»...

Разумеется, как это часто бывает в отечественных реалиях, все закончилось в одночасье, но внутренняя логика явлений оказалась гораздо более жизнеспособной, чем сам сериал. Поэтому он породил ожидание, которое замкнулось в цикл, ставший элиадовским *in illo tempore*... А эсхатология осталась в девяностых...

Таковы вкратце наброски портретов трех выдающихся актуариев долга, которым теперь навсегда суждено оберегать нашу *память о Золотом веке...*

……………

Наша книга подходит к концу.

Мы выбрали тему смерти, чтобы поговорить о жизни. Мы восхищались формулами, чтобы воздать должное живому слову, и предавались суевериям, чтобы помянуть тех, перед кем суеверия были бессильны. Не называя то, чем дорожишь, и прикрываясь трогательно заготовленными изъянами...

Вот, наверное, и все – по крайней мере, для тех, кто, подобно составителю, из последних сил пытается верить в «предустановленную гармонию». Для остальных – несколько строк из Сергея Евгеньевича, только уже не Савича, а князя Трубецкого:

«Говорят, слова не помогают в жизненных горестях, но я не могу с этим согласиться. На стенах моей камеры какой-то сидевший там раньше заключенный тщательно вырисовал карандашом: "И ЭТО ПРОЙДЕТ". Эти три слова восточной мудрости служили мне большим утешением...»[72].

> «И предал я сердце мое тому, чтобы познать мудрость и познать глупость. И узнал, что и это томление духа, потому что во многая мудрости – многая печали, и кто умножает познания – умножает скорбь.
>
> Что было, то и будет, и что делалось – то и будет делаться. И нет ничего нового под солнцем».
>
> *Опер Казанцев* [73]

---

[72] *Князь С.Е. Трубецкой.* Минувшее. Цит. по [Тру], с. 226.

[73] Да Екклезиаст это, Екклезиаст, не волнуйтесь! Просто искушение оказалось сильнее. Цит. по: «Улицы разбитых фонарей», 19 серия: «Инстинкт мотылька», 51-я минута. Реж. Д. Светозаров. СПб: Русское видео, 1998. 52 мин.

ЛИТЕРАТУРА

[*АБС*] *Стругацкий А.Н., Стругацкий Б.Н.* Обитаемый остров / А.Н. Стругацкий, Б.Н. Стругацкий. – Смоленск: Ибис, ЦДИ, 1992. – 560 с.

[Анд] *Андерсен Г.Х.* Дорожный товарищ // Г.Х. Андерсен. Сказки / пер. с датск. А.В. Ганзен под ред. и в обраб. Т. Сарана. Илл. Иржи Трнки. – 2-е изд. – Прага: АРТИЯ, 1967. – С. 112–127.

[Биг-Баг] *Бёрджесс Г.* Актуарная математика / Г. Бёрджесс, А.Ф. Блант, Дж. Кернкросс, Д.Д. Мак-Лэйн / пер. с англ. под ред. А.Г. Дейча и В.К. Малиновского. – М.: Янус-К, 2001. – 656 с., ил.

[Блок] *Блок А.А.* Скифы // А.А. Блок. Стихотворения и поэмы / сост. и примеч. Вл. Орлова. – М.: Худ. лит., 1983. – 206 с., ил. (Классики и современники. Поэтическая биб-ка). – С. 178–180.

[Бор] *Боровков А.А.* Курс теории вероятностей / А.А. Боровков. – М.: Наука, 1972. – 288 с.; с ил.

[Бул] *Булгаков М.А.* Белая гвардия. Театральный роман. Мастер и Маргарита: Романы / М.А. Булгаков – М.: Худ. лит., 1988. – 751 с.

[Го] *Гоголь Н.В.* Вечера на хуторе близ Диканьки. Миргород. – М.: Худ. лит., 1978. – 336 с.

[Гол] *Гольдони К.* Комедии: в 2 т.: [пер. с итал.] / предисл. Б.Г. Реизова; примеч. И.П. Володиной. – М.-Л.: Искусство, 1959. – Т.1. – 812 с.

[Гре] Ансамбль Аквариум [Звукозапись] / Б. Гребенщиков; анс. Аквариум. – М.: Мелодия, 1987. – 1 грп. (52 мин.) – Комментарий об авторе. – Сидя на красивом холме. – Иван Бодхидхарма. – Небо становится ближе. – Электричество. – Сны о чем-то большем. – Кад годдо. – Дети декабря – Деревня. (См. также http://www.aquarium.ru/discography/deti_dekab217.html#@545).

[Гри] *Грин А.С.* Алые паруса: Феерия // А. Грин. Алые паруса. Избранные произведения / А. Грин. – Иваново: Ивановокнигоиздат, 1963. – С. 325–397.

[Гум] *Гумилев Л.Н.* Конец и вновь начало // Свод № 2. Международный альманах / сост. Н.В. Гумилева; пред., коммент., общ. ред. А.И. Куркчи / Л.Н. Гумилев. – М.: Танаис ДИ-ДИК, 1994. – 544 с.; ил.

[Дан] Данте. Божественная комедия: Эпическая поэма / пер. с ит. М. Лозинского // Европейский эпос античности и средних веков / предисл. и коммент. И. Нахова; оформл. И. Архипова. – М.: Дет. лит., 1989. – С. 585–694.

[Дем] *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – 7-е изд. – М.: Наука, 1969. – 544 с.; с ил.

[До] *Дойл А.К.* Записки о Шерлоке Холмсе / пер. с англ. М. Литвиновой и др.; сост. и вступ. ст. И.В. Шабловской. – Мн.: Маст. літ., 1984. – 448 с.

[Евг] *Евграфов М.А.* Ряды и интегральные представления / М.А. Евграфов // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 13 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. Анализ-1). – М., 1986. – С. 5–92.

[Иль] *Ильин И.П.* Постструктурализм. Деконструктивизм. Постмодернизм / И.П. Ильин. – М.: Интрада, 1996. – 256 с.

[Ка] *Казанцев А.В.* Элементы математической логики: учеб. пособие / А.В. Казанцев. – Казань: Казан. ун-т, 2013. – 146 с.

[Кап] *Капица С.П.* Феноменологическая теория роста населения Земли / С.П. Капица // Успехи физ. наук. – 1996. – Т. 166, № 1. – С. 63–79.

[Киз] *Киз Д.* Цветы для Элджернона / пер. с англ. С. Васильевой // Антология научно-фантастических рассказов. – М.: МП «ВСЕ ДЛЯ ВАС», 1992. – С. 41–69.

[Кру] *Крусанов П.В.* Укус ангела: Роман / П.В. Крусанов. – СПб.: Амфора, 2001. – 351 с.

[Ле] *Ленин В.И.* Материализм и эмпириокритицизм. Критич. заметки об одной реакционной философии / В.И. Ленин. – М.: Политиздат, 1977. – 392 с.; с ил.

[Ли] *Ли Х.* Убить пересмешника... Роман / пер. с англ. Н. Галь и Р. Облонской. Послесловие Ю.В. Ковалева. – Л.: Лениздат, 1987. – 287 с.

[ЛОВ] *Овалов Л.С.* Медная пуговица: Роман / Л.С. Овалов. – 4-е изд. – М.: Изд-во МПИ, 1990. – 208 с.; ил.

[Ми-1] *Миссаров М.Д.* Вероятностные модели в исследовании операций: учеб. пособие / М.Д. Миссаров. – Казань: Изд-во Казанск. университета, 2006. – 155 с.

[Ми-2] *Миссаров М.Д.* Введение в финансовую математику: учеб. пособие / М.Д. Миссаров. – Казань: Изд-во Казанск. университета, 2010. – 72 с.

[МИД] *Уайлдер Т.* Мартовские иды. Роман / пер. с англ. Е. Голышевой // Новый мир. – 1976. – № 7. – С. 119–179; № 8. – С. 145–185.

[МЭ] Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. Т. 1–5. – М.: Советская энциклопедия, 1977–1985.

[Норт] *Уайлдер Т.* Теофил Норт. Роман / пер. с англ. В. Голышева // Иностранная литература. – 1976. – № 6. – С. 76–123; № 7. – С. 141–216; № 8. – С. 51–147.

[Пет] *Петрушевская Л.С.* Сказка о часах // Л. Петрушевская. Лечение Василия и другие сказки / рис. В. Пивоварова. – М.: ВТПО «Киноцентр» СК СССР, 1991. – С. 44–54.

[ПС-1] *Полиа Г.* Задачи и теоремы из анализа / Г. Полиа, Г. Сеге; пер. с нем. Д.А. Райкова. – М.: Наука, 1978. – Ч. I. – 3-е изд. – 392 с.; с ил.

[Поп] *Поппер К.Р.* Предположения и опровержения: Рост научного знания / пер. с англ. А.Л. Никифорова, Г.А. Новичковой, предисл. В.Ю. Кузнецова / К.Р. Поппер. – М.: ООО «Издательство АСТ»: ЗАО НПП «Ермак», 2004. – 638, [2] с. – (Philosophy).

[Пуш] *Пушкин А.С.* Сказка о попе и о работнике его Балде // А.С. Пушкин. Избранные произведения. – М.-Л.: Детгиз, 1949. – С. 295–301.

[Сав] *Савич С.Е.* Элементарная теория страхования жизни и трудоспособности / С.Е. Савич. – М.: Янус-К, 2003. – 3-е изд., испр., с доп. – 496 с.; ил.

[Сав-1] *Савич С.Е.* Элементарная теория страхования жизни и трудоспособности / С.Е. Савич. – СПб.: Издание железнодорожного пенсионного комитета, 1909. – 2-е изд. 404 с.

[Салт] *Салтыков-Щедрин М.Е.* История одного города / М.Е. Салтыков-Щедрин / Рис. Кукрыниксов. – М.–Л.: Детгиз, 1948. – 268 с.

[Се-1] *Семенов Г.В.* Национальный продукт: проблемы дефицита и сбалансированности. – Казань: Изд-во Казанск. университета, 1993. – 160 с.

[Се-2] *Семенов Г.В.* Лекции по экономической кибернетике: учебное пособие / Г.В. Семенов. – Казань: Изд-во Казанск. университета, 1990. – 107 с.

[СтаС] Статистический словарь / гл. ред. М.А. Королев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика. – 1989. – 623 с.: ил.

[Тер] Теремок. Пересказ А. Толстого // Жили-были. Русские народные сказки / сост. Л. Грибова. Худ. Е. Рачёв. – М.: Малыш, 1993. – С. 5–10.

[Толк] *Толкиен Дж.Р.Р.* Властелин колец. Третья часть. Возвращение Короля / Дж.Р.Р. Толкиен / пер. с англ. Н. Григорьевой, В. Грушецкого. – Спб: Северо-Запад, 1992. – 448 с.

[Тол] *Толстой А.Н.* Золотой ключик, или приключения Буратино / рис. А. Каневского. – М.-Л.: Детгиз, 1953. – 128 с.

[Тру] *Трубецкой С.Е.* Минувшее / С.Е Трубецкой. – М.: ДЭМ, 1991. – 336 с.

[Уит] *Уиттл П.* Вероятность / П. Уиттл; пер. с англ. Н.Г. Гамкрелидзе; под ред. В.В. Сазонова. – М.: Наука, 1982. – 288 с.

[Фал] *Фалин Г.И.* Актуарная математика в задачах / Г.И. Фалин, А.И. Фалин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 192 с.

[Фе-I] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х т. / В. Феллер; пер. с англ. Ю.В. Прохорова; предисл. А.Н. Колмогорова. – М.: Мир, 1984. – Т.1:– 528 с., ил.

[Фе-II] *Феллер В*. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х т. / В. Феллер; пер. со второго англ. изд. Ю.В. Прохорова. – М.: Мир, 1984. – Т.2: – 738 с., ил.[74]

[Фихт-I] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1966. – Т. I. – 6-е изд. – 608 с.; с ил.

[Фихт-II] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1966. – Т. II. – 6-е изд. – 800 с.; с ил.

[Фуко] *Фуко М.* Археология знания / М. Фуко; пер. с фр. С. Митина, Д. Стасова; общ. ред. Бр. Левченко. – Киев: Ника-Центр, 1996. – 209 с. – (Серия «OPERA APARTA»; Вып. 1).

[74] Эти два тома темно-зеленого цвета упоминались выше как «Зеленый Феллер».

[Эко] *Эко У.* Поиски совершенного языка в европейской культуре / У. Эко; пер. с итал. и примечания А. Миролюбовой. – Спб.: Александрия, 2009. – 423 с. (Серия «Становление Европы»).

[Эко-1] *Эко У.* Отсутствующая структура. Введение в семиологию / У. Эко. – ТОО ТК «Петрополис», 1998. – 432 с.

[Эли] *Элиаде М.* Мифы, сновидения, мистерии / М. Элиаде; пер. с англ. А.П. Хомик; под ред. С.Л. Удовик. – М.: Рефл-бук (оформление, серия), Киев: Ваклер (перевод), 1996. – 288 с. (Серия «Актуальная психология»).

[Энг] *Энгельс Ф.* Диалектика природы/ Ф. Энгельс. – М.: Партиздат, 1933. – 6-е изд. – 304 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Андрей Витальевич **Казанцев**

Основы актуарных расчетов страхования жизни

Учебное пособие

Редактор *А.А. Мартьянова*

Дизайн обложки *М.А. Ахметов*

Подписано в печать 03.03.2015. Бумага офсетная.
Печать ризографическая. Форм. 60 × 84 1/16. Гарнитура «Таймс».
Усл.п.л. 6,15. Печ. л. 12,25. Тираж 100. Заказ 31.

Издательство Казанского университета

Отпечатано в лаборатории оперативной полиграфии Изд. КФУ
420012, Казань, ул.Бутлерова, 4
Тел. 291-13-88, 291-13-47