БАКАЛАВРИАТ
УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Экономический факультет

Д. В. Денисов
И. Б. Котлобовский

АКТУАРНЫЕ РАСЧЕТЫ в страховании жизни

Учебное пособие

МГУ

Издательство Московского
университета
2013

УДК 336.71; 336.72; 347.732; 336.77; 368
ББК 65.271
Д 33

Денисов Д.В., Котлобовский И.Б.
Д33 Актуарные расчеты в страховании жизни: Учебное пособие. — М.: Издательство Московского университета, 2013. — 126 с. (Бакалавриат. Учебные пособия).
ISBN 978-5-211-06468-3

Учебное пособие содержит последовательное и систематизированное изложение проверенных практикой актуарных методов расчетов тарифных ставок, резервов по страхованию жизни. Подробно обсуждаются методы формирования нетто- и брутто-премий, динамика изменения резерва во время действия страхового полиса для различных видов долгосрочного страхования. Книга подготовлена на основе части курса лекций и материалов семинарских занятий, которые в течение нескольких лет авторы проводят на экономическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова в рамках курса по выбору «Актуарные расчеты». Уникальность издания и основное его достоинство заключаются в том, что в нем помимо теоретического материала разбираются решения большого количества задач по актуарной математике.

Для студентов экономических факультетов и отделений прикладной математики университетов, а также лиц, применяющих актуарные вычисления в своей работе.

Ключевые слова: актуарные расчеты, нетто-премия, брутто-премия, аннуитет, резерв, страхование.

УДК 336.71; 336.72; 347.732; 336.77; 368
ББК 65.271

Denisov D.V., Kotlobovsky I.B.
Actuarial Calculations in Life Insurance: The manual. — Moscow: Moscow University Press, 2013. — 126 p. (Bachelor's Programme. Manuals).

The manual contains a consistent and systematic account of actuarial practice proven methods of calculation of tariff rates, life insurance reserves. The methods of forming net and gross premiums, changes in the reserve during the operation of the insurance policy for the various types of long-term insurance are discussed in detail. The book is based on the part of lecture course and seminar materials that the authors have been delivering for a few years at the Faculty of Economics of Lomonosov Moscow State University at the elective course "Actuarial methods". The uniqueness of the publication and its main advantage is that in additional theoretical material it provides solutions to many problems of actuarial mathematics.

The book is designed for the students of economic and mathematical departments of universities and individuals using actuarial calculations in their work.

Key words: actuarial calculations, net premium, gross premium, annuity, reserve, unsurance.

ISBN 978-5-211-06468-3

Оглавление

Предисловие 6

Глава 1.
ХАРАКТЕРИСТИКИ ДОЖИТИЯ. ТАБЛИЦЫ СМЕРТНОСТИ 9

1.1. Функция дожития 9
1.2. Вероятность дожития начиная с произвольного возраста 11
1.3. Интенсивность (сила) смертности 14
1.4. Моменты случайной величины предстоящей продолжительности жизни 21
1.5. Округленная случайная величина предстоящей продолжительности жизни 23
1.6. Гипотезы распределения смертей между целочисленными возрастами 26
1.7. Аналитические законы смертности 30
1.8. Селективные и окончательные таблицы смертности 31
1.9. Другие функции дожития 36

Глава 2.
ЕДИНОВРЕМЕННЫЕ НЕТТО-ПРЕМИИ. АННУИТЕТЫ 44

2.1. Основные виды страхования жизни 45
2.2. Выражение единовременных нетто-премий через коммутационные числа 56
2.3. Аннуитеты в страховании жизни 64
2.4. Кратные и непрерывные аннуитеты 76

Глава 3.
РЕГУЛЯРНЫЕ ПРЕМИИ 87

3.1. Регулярные нетто-премии 88
3.2. Регулярные брутто-премии 94

Глава 4.
РЕЗЕРВЫ. БАЗИСЫ РАСЧЕТА 99

4.1. Брутто-резервы 100
4.2. Нетто-резервы 107
4.3. Прибыль от смертности 110

Приложение.
ИЛЛЮСТРАТИВНЫЕ АКТУАРНЫЕ ТАБЛИЦЫ 113

Литература 126

Предисловие

Учебное пособие подготовлено на основе части курса лекций и материалов семинарских занятий, которые в течение нескольких лет авторы проводят на экономическом факультете Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в рамках курса по выбору «Актуарные расчеты». Уникальность издания и основное его достоинство заключаются в том, что в нем помимо теоретического материала приводятся решения большого количества задач по актуарной математике. Поэтому оно может с успехом использоваться не только для усвоения университетского курса, но и для подготовки к квалификационным экзаменам в актуарных профессиональных ассоциациях. В целом структура и содержание книги соответствуют международному стандарту и требованиям подготовки актуариев по курсу «Актуарная математика в страховании жизни».

Профессия актуария с более чем полуторавековой историей считается очень достойной и престижной в мире. Она регулярно попадает в список 25 лучших профессий, ежегодно публикуемый Министерством труда США. Специалист, подготовленный в соответствии с международными стандартами и признаваемый актуарием в одной стране, может быть принят на работу по специальности и в другой стране, профессиональная ассоциация которой признает международные стандарты профессии актуария.

В организации квалификационных экзаменов, проводимых в России Гильдией актуариев начиная с 2003 г., неоднократно принимали участие международные эксперты, в частности из Group Consultatif при Еврокомиссии, подтвердившие адекватность экзаменов гильдии международным стандартам. Система экзаменов, проводимых Гильдией актуариев, стала одним из факторов признания ее полноправным членом международной актуарной ассоциации (IAA) в 2008 г. Данная книга может быть использована для подготовки к экзамену по курсу «Актуарная математика», который проводит Гильдия актуариев.

Профессия актуария в страховании имеет в нашей стране не очень радостную историю. Хотя уже в законе «Об организации страхового дела» (в редакции 2003 г.) был определен порядок аттестации актуариев, позже эти нормы закона были изъяты и профессия актуария до сих пор остается в России неконституированной. Однако есть надежда, что это будет сделано в самое ближайшее время, поскольку соответствующие предложения внесены в Государственную Думу. Дальнейшее развитие отечественного страхования, гармонизация его регулирования с международными требованиями совершенно невозможны без принятия законодательных норм, определяющих функции актуария в Российской Федерации.

Суть профессии актуария заключается в том, что он является специалистом по оценке рисков. Как известно, мы живем в мире рисков, в котором много элементов неопределенности. В первую очередь эта профессия важна в финансовой сфере, в частности в страховании, где неправильные решения, связанные с рисками, могут привести к серьезным последствиям и экономическим потерям как для компании, так и для ее клиентов.

Особое значение имеет профессия актуария в страховании жизни. Правильные расчеты тарифов и страховых резервов служат гарантией надежности компании по страхованию жизни и выполнения ею своих обязательств перед клиентами. Освоение материалов данной книги позволит подготовиться к выполнению функций актуария по страхованию жизни.

По развитию страхования жизни Россия пока существенно отстает не только от развитых стран, но и от стран Центральной и Восточной Европы. Это означает, что у данной отрасли страхования в РФ очень большой потенциал роста, что профессия актуария станет востребованной в самое ближайшее время и страховые компании будут принимать на работу высококвалифицированных специалистов.

В пособии представлены разнообразные модели и задачи, возникающие в страховании жизни. Оно может быть полезно не только будущим актуариям, но и специалистам в области прикладной математики. Для освоения материалов книги требуется знание основ математического анализа, теории вероятностей и математической статистики. Сделаем несколько предварительных замечаний.

В актуарной математике используется фундаментальное предположение: математическое ожидание современной стоимости премий равно математическому ожиданию современной стоимости ожиданий страховщика. По сути, этот принцип означает, что актуарная премия не может приносить выгоду ни клиенту, ни страховщику, т.е. она является справедливой.

При расчете страховых премий, выплат, резервов необходимо учитывать эффект дохода от инвестиций собранных премий. Средства, собираемые страховщиками в виде страховых премий, инвестируются в рамках текущего законодательства, и в соответствии с инвестиционной политикой у каждой компании имеется свой показатель инвестиционной доходности, меняющийся во времени случайным образом. При актуарных расчетах необходимо находить приведенные к определенному моменту стоимости, которые называются текущими или современными стоимостями (present value) будущих выплат и взносов. Следует еще раз отметить, что будущая инвестиционная эффективность, по сути, является случайной величиной, поэтому, как правило, для актуарных расчетов применяется некоторая усредненная величина, называемая расчетной или просто нормой доходности и обозначаемая через i. В соответствии с данной величиной выплаты и взносы, совершаемые в различные моменты времени, дисконтируются к определенному моменту.

Демографические показатели, используемые в моделях, в частности вероятности дожития до определенного возраста, определяются с помощью таблиц смертности. В приложении к книге приводятся иллюстративные таблицы смертности, необходимые для проведения самостоятельных расчетов читателями.

Структура книги достаточно традиционна для аналогичных зарубежных изданий. В гл. 1 даются основные понятия курса «Актуарная математика». В гл. 2 в математических моделях рассчитываются так называемые чистые премии, учитывающие такие факторы, как расчетная норма доходности, фактор смертности и срок действия договора. Издержки страховщика при расчете чистых премий игнорируются. В гл. 3 и 4 в моделях рассматриваются математические модели по страхованию жизни, в том числе с учетом издержек страховой организации.

Д.В. Денисов,
И.Б. Котлобовский

Глава 1.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ДОЖИТИЯ. ТАБЛИЦЫ СМЕРТНОСТИ

1.1. Функция дожития

В договорах страхования, связанных с дожитием застрахованного лица до фиксированного возраста, одним из основных факторов неопределенности, влияющих на оценку обязательств страховщика, является продолжительность жизни застрахованного после заключения договора. Страховые компании имеют дело с большим количеством клиентов, поэтому продолжительность жизни каждого застрахованного трактуется как случайная величина, имеющая набор характеристик, присущих рассматриваемому классу застрахованных лиц.

Для новорожденного продолжительность его предстоящей жизни будем считать непрерывной случайной величиной и обозначать как X. Для однородной группы застрахованных предполагается известной функция распределения случайной величины X, обозначаемая как $F(x)$. На практике это означает, что при работе с достаточно большой, однородной по условиям жизни и роду занятий группой клиентов страховой компании известна статистика смертности внутри данной группы, на основании которой строится функция $F(x)$.

В актуарной математике любой индивид, находящийся в возрасте x, именуется как «жизнь x» и обозначается (x). При этом разность $1-F(x)$ называется функцией дожития для данной группы застрахованных и обозначается через $s(x)$. Функция дожития $s(x)$ непрерывно убывает, $s(0)=1$, $s(+\infty)=0$.

Из определения $s(x)$ следует, что $P(a<X\le b)=s(a)-s(b)$. Из формулы условной вероятности вытекает, что для человека, дожившего до возраста x, вероятность прожить еще t лет обозначается через ${}_tp_x$ и составляет

$${}_tp_x=\frac{s(x+t)}{s(x)}.$$

Вероятность того, что (x) умрет на интервале $(x, x+t)$, равна

$$P(x<X<x+t\,|\,X>x \; \frac{s(x)-s(x+t)}{s(x)}=1-\frac{s(x+t)}{s(x)}=1-{}_tp_x;$$

здесь ${}_tp_x$ — введенная ранее вероятность дожития до возраста $x+t$ для человека возраста x; $1-{}_tp_x={}_tq_x$ — вероятность наступления смерти (x) до наступления возраста $x+t$. При $x=0$ величина ${}_tp_x$ равна $s(t)$.

Пример. Случайная величина продолжительности жизни X имеет функцию распределения

$$F(t)=\min\left(1,\sqrt{\frac{1}{80}}\right),\ t>0.$$

1. Чему равна вероятность дожития до возраста 75 лет для новорожденного?

2. Какова вероятность того, что новорожденный в настоящее время индивид умрет на возрастном интервале от 20 до 45 лет?

Решение.

1. Вероятность дожития по определению есть $s(75)=1-\sqrt{75/80}=$ $=0{,}025321$.

2. Искомая вероятность равна $F(45)-F(20)=0{,}75-0{,}5=0{,}25$.

Пример. Для некоторой группы новорожденных функция дожития $s(x)=e^{-0{,}01x}$, $x>0$.

1. Чему равна вероятность того, что новорожденный из данной группы не доживет до 65 лет?

2. Как найти вероятность того, что (40) умрет на возрастном интервале от 50 до 75 лет?

Решение.

1. Данная вероятность равна $1-s(65)=1-e^{-0{,}01x}=0{,}477954$.

2. Данная вероятность равна $\dfrac{s(50)-s(75)}{s(50)}=1-e^{-0{,}01x}=0{,}221199$.

В практике страхования параметры случайной величины продолжительности предстоящей жизни основаны на информации статистических таблиц смертности. Функция дожития также строится исходя из этих таблиц. На чем основано данное построение? Обозначим через $L(x)$ случайное число индивидов, доживших до возраста x, из первоначальной группы, состоящей из l_0 практически одновременно родившихся людей, а через l_x — математическое ожидание $L(x)$. В таком случае имеет место равенство $l_x=l_0\,s(x)$. На практике есть данные по оценкам величин l_x, $x>0$. Как правило, таблицы основаны на целочисленных значениях x. Таким образом, $s(x)$ представляется в виде величины

$$s(x) = \frac{l_x}{l_0}\,. \qquad (1.1.1)$$

Из (1.1.1) следует

$$_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}\,. \qquad (1.1.2)$$

Через $D(x)$ будем далее выражать случайное число смертей на возрастном интервале от x до $x+1$. В таком случае среднее значение $D(x)=d_x$: $d_x=E(D(x))$. Для целого возраста x величина d_x — ожидаемое число смертей на $x+1$-м году жизни. Из равенства $D(x)=L(x)-L(x+1)$ следует

$$d_x = l_x - l_{x+1}.$$

Ожидаемое число людей, умерших в течение возрастного интервала $(x, x+t)$, равно

$$_td_x = l_x - l_{x+1} = l_0(s(x) - s(x+t)).$$

Величина $_tp_x$ имеет также обозначение $s_x(t)$. Следовательно, функция дожития $s(x)$ может быть выражена как $s_0(x)$.

1.2. Вероятность дожития начиная с произвольного возраста

До сих пор рассматривалась вероятность дожития до фиксированного возраста для новорожденного, т.е. для (0). Введем в рассмотрение случайную величину $T(x)$ — непрерывную случайную величину предстоящей продолжительности жизни для (x). Здесь необходимо отметить, что данная случайная величина рассматривается при условии, что индивид достиг возраста x. Неравенство $T(x) \le t$ для всякого неотрицательного t в актуарных терминах означает, что (x) проживет не более t лет. В обычной терминологии это выражается в том, что индивид доживает до возраста x и при этом условии не доживет до возраста $x+t$. Значит, функция распределения случайной величины $T(x)$ определяется как

$$F_{T(x)}(t) = P(T(x) \le t) = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = 1 - {}_tp_x;$$

последнее означает, что ранее определенная величина $_tq_x$ совпадает с функцией распределения случайной величины $T(x)$:

$$F_{T(x)}(t) = {}_tq_x. \qquad (1.2.1)$$

Случайная величина продолжительности жизни X связана со случайной величиной $T(x)$ равенством

$$P(T(x) \leq t) = P(x < X \leq x + t \mid X > x).$$

Из определения $T(x)$ и формулы полной вероятности следует

$$P(T(x) > t + r) = P(T(x + r) > t \mid T(x) > r)\, P(T(x) > r) = {}_r p_x \cdot {}_t p_{x+r}.$$

Исходя из (1.1.2) последнее равенство выглядит как

$$\frac{l_{x+r+t}}{l_x} = \frac{l_{x+r}}{l_x}\,\frac{l_{x+r+t}}{l_{x+r}}.$$

В терминах вероятностей дожития данное соотношение записывается в виде

$$_{r+t}p_x = {}_r p_x \cdot {}_t p_{x+r}. \tag{1.2.2}$$

В частности, при $t = 0$ равенство (1.2.2) в силу условия $_0 p_x = 1$ при $x > 0$ переходит в тождество $_r p_x = {}_r p_x$. Кроме того, из (1.2.2) вытекает

$$_{r+t}q_x = 1 - (1 - {}_r q_x)\,(1 - {}_t q_{x+r}).$$

Пример. Доказать, что $s_0(x + t) = s_0(x)\, s_x(t)$.

Решение. Перемножая равенства $s_0(x) = \dfrac{l_x}{l_0}$, $s_x(t) = \dfrac{l_{x+t}}{l_x}$, получим $s_0(x)\, s_x(t) = \dfrac{l_{x+t}}{l_0}$; последнее частное равно $s_0(x + t)$.

Часто рассматривается однородная группа людей одного возраста x с предельным возрастом w, до которого никто из этой группы не доживет. В теоретических работах многие распределения $T(x)$ предполагают $w = \infty$. При этом вероятности дожития до нереально больших возрастов пренебрежимо малы. Поэтому, не ограничивая общности, всегда можно считать, что случайная величина $T(x)$ может принимать любые положительные значения.

Пример. Пусть $w = 100$, $l_x = w - x$, $x \in (0, w)$.

1. С какой вероятностью (60) доживет до 75-летнего возраста?
2. С какой вероятностью (60) умрет на возрастном интервале от 80 до 90 лет?
3. С какой вероятностью (60) проживет 50 лет?

Решение.

1. Искомая вероятность $_{15}p_{60}$ равна $\dfrac{l_{75}}{l_{60}} = \dfrac{25}{40} = 0{,}625.$
2. Эта вероятность вычисляется как $\dfrac{s(80) - s(90)}{s(60)} = \dfrac{l_{80} - l_{90}}{l_{60}} = 0{,}25.$

3. Вероятность равна нулю, поскольку по условию предельный возраст равен 100 годам, следовательно, до 110 лет человек дожить не сможет.

Величина ${}_tp_x$, по определению равная $P(T(x) \geq t)$, т.е. вероятности того, что x доживет до возраста $x + t$, при $t=1$ записывается без префикса t: ${}_1p_x = p_x$. Аналогично ${}_1q_x$ записывается просто как q_x. Таким образом,

$p_x = P((x)$ доживет по крайней мере до $x+1)$,

$q_x = P((x)$ умрет в течение года$)$.

При этом $p_x = \dfrac{l_{x+1}}{l_x}$, $q_x = 1 - p_x = \dfrac{d_x}{l_x}$.

При всех t очевидно тождество

$${}_tp_x + {}_tq_x = 1.$$

Пример. Доказать, что при всех натуральных $n > 1$

$${}_np_x = p_x\ p_{x+1}\ p_{x+2} \cdots p_{x+n-1}. \qquad (1.2.3)$$

Решение. Доказательство вытекает из равенства

$$p_x\ p_{x+1}\ p_{x+2} \cdots p_{x+n-1} = \frac{l_{x+1}}{l_x}\frac{l_{x+2}}{l_{x+1}}\frac{l_{x+3}}{l_{x+2}} \cdots \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} = \frac{l_{x+n}}{l_x} = {}_np_x.$$

Отложенной на t лет вероятностью смерти называется вероятность того, что (x) умрет на возрастном интервале $(x+t,\ x+t+u)$. Эта вероятность обозначается через ${}_{t|u}q_x$ и равна

$${}_{t|u}q_x = P(T(x) \in (t, t+u)) = \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)} = \frac{l_{x+t} - l_{x+t+u}}{l_x}. \qquad (1.2.4)$$

При значении $u=1$ функция ${}_{t|1}q_x$ записывается просто ${}_{t|}q_x$. Таким образом, ${}_{t|}q_x = P((x)$ умрет в течение возрастного года $(x, x+1))$. В соответствии с (1.2.4)

$${}_{t|}q_x = \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x} = \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_{x+t}}\frac{l_{x+t}}{l_x} = {}_tp_x \cdot q_{x+t}. \qquad (1.2.5)$$

Равенство (1.2.5) легко интерпретируется следующим образом. Умереть на возрастном промежутке $[x+t,\ x+t+1)$ означает дожить до возраста $x+t$ и при этом условии умереть до наступления возраста $x+t+1$.

Пример. Доказать, что ${}_{t|}q_x = {}_{t+1}q_x - {}_tq_x$.

Решение. ${}_{t+1}q_x - {}_tq_x = \dfrac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x}$. Последнее выражение в силу (1.2.4) равно ${}_{t|}q_x$.

Пример. Для некоторой таблицы смертности известны ${}_4q_{76}=0{,}13$ и ${}_{20}q_{56}=0{,}25$. Требуется вычислить значение ${}_{24}p_{56}$.

Решение. ${}_{24}p_{56}=(1-{}_{20}q_{56})(1-{}_4q_{76})=0{,}75\cdot 0{,}87=0{,}6525.$

1.3. Интенсивность (сила) смертности

Интенсивность, или сила, смертности позволяет вычислить вероятность смерти на малом промежутке времени после текущего возраста как значение функции, линейной относительно длины данного временного промежутка. Эта характеристика вводится следующим образом. Для бесконечно малого значения $t=dx$ величина ${}_tq_x$ равна ${}_{dx}q_x = (s(x)-s(x+dx))/s(x)$. При условии существования производной $s'(x)$ последняя величина есть $-\frac{s'(x)}{s(x)}dx$. Коэффициент $-\frac{s'(x)}{s(x)}$ называется интенсивностью (или силой) смертности в возрасте x и обозначается через μ_x. Таким образом, интенсивность смертности в возрасте x равна

$$\mu_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{{}_{\Delta x}q_x}{\Delta x}. \tag{1.3.1}$$

Пример. Возрасту $x=50$ лет соответствует $\mu_{50}=0{,}01$. Требуется вычислить приближенную вероятность того, что (50) умрет в течение ближайших трех месяцев.

Решение. Искомая вероятность равна $0{,}01\cdot 0{,}25=0{,}0025$.

Следует заметить, что величины μ_x и q_x существенно не различаются. Действительно, если рассмотреть функцию $h(\Delta x)=\frac{{}_{\Delta x}q_x}{\Delta x}$, то

$$\mu_x=h(dx)=-\frac{s'(x)}{s(x)},\quad q_x=h(1)=-\frac{s'(x+\theta)}{s(x)},\ \theta\in(0,1).$$

Следовательно, если производная $s'(x)$ непрерывна, то $\mu_x\approx q_x$. В частности, если $s'(x)$ в области значений x удовлетворяет условию Липшица с константой L, то в этой области

$$|\mu_x-q_x|<L/s(x).$$

Кроме того, в области вогнутости функции дожития, т.е. в области убывания производной $s'(x)$, значение $q_x>\mu_x$, а в области выпуклости $s'(x)$, наоборот, $q_x<\mu_x$.

Из определения l_x и соотношения $l_x=l_0\, s(x)$ имеем

$$\mu_x=-\frac{l'_x}{l_x}. \tag{1.3.2}$$

Пример. Пусть $l_x = l_0(1 - x/w)$, $x \in (0, w)$.

1. Требуется найти d_x, $x \in (0, w)$.

2. Найти μ_x, $x \in (0, w)$.

3. Найти q_x, $x \in (0, w)$.

Решение.

1. $d_x = l_x - l_{x+1} = \dfrac{l_0}{w}$ при всех $x \in (0, w)$.

2. $-\dfrac{d}{dx} l_x = \dfrac{l_0}{w}$, следовательно, $\mu_x = 1/(w-x)$, $x \in (0, w)$.

3. $q_x = 1 - \dfrac{w-x-1}{w-x} = \dfrac{1}{w-x} = \mu_x$.

Из равенства (1.3.2) вытекает, что для всякого возраста x сила смертности

$$\mu_x = -\frac{d}{dx}(\ln l_x).$$

Отсюда следует важное соотношение

$$\ln l_x - \ln l_{x+t} = -\int_0^t \mu_{x+y}dy = \int_0^t \frac{d}{dy}(\ln l_{x+y})dy = \ln\frac{l_{x+t}}{l_x} = \ln {}_t p_x,$$

которое можно переписать в виде

$${}_t p_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+y}dy\right).$$

Кроме того, поскольку функция распределения $F_{T(x)}(t)$ случайной величины $T(x)$ есть ${}_t q_x$, то эта функция выражается через интенсивность смертности:

$$F_{T(x)}(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+y}dy\right).$$

Отсюда следует, что $\lim_{t\to\infty}\int_0^t \mu_{x+y}dy = \infty$. Это означает, что положительная функция $g(x)$ может являться интенсивностью смертности, если выполнено необходимое условие, именно

$$\int_0^\infty g(x+t)dt = \infty, x > 0.$$

Пример. Можно ли функцию $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x > 0$, использовать в качестве силы смертности?

Решение. Нельзя: если $\mu_{x+t} = g(x+t) = \dfrac{1}{1+(x+t)^2}$, то $\int_0^\infty g(x+t)dt = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x < \infty$.

Интенсивность смертности позволяет получить аналитическое выражение для плотности распределения случайной величины оставшегося срока жизни. Именно функция ${}_tq_x$, как ранее было отмечено, является функцией распределения случайной величины $T(x)$. Выражение для плотности $f_{T(x)}(t)$ распределения $T(x)$ получается дифференцированием ${}_tq_x$ по переменной t:

$$f_{T(x)}(t)=\frac{d}{dt}({}_tq_x)=\frac{d}{dt}(1-{}_tp_x)=-\frac{d}{dt}\left(\frac{l_{x+t}}{l_x}\right)=-\frac{l'_{x+t}}{l_{x+t}}\frac{l_{x+t}}{l_x}={}_tp_x\cdot\mu_{x+t},$$

т.е.

$$f_{T(x)}(t)={}_tp_x\cdot\mu_{x+t}. \tag{1.3.3}$$

Из (1.3.3) следует

$$\frac{d}{dt}({}_tp_x)=-{}_tp_x\cdot\mu_{x+t}. \tag{1.3.4}$$

Пример. Доказать, что если для некоторого $x>0$ плотность $f_{T(x)}(t)$ возрастает (убывает) по переменной t на интервале (0, 1), то $q_x>\mu_x$ ($q_x<\mu_x$).

Решение. Рассмотрим функцию $h(\Delta x)=\dfrac{l_x-l_{x+\Delta x}}{l_x\Delta x}$, тогда $q_x=h(1)$, $\mu_x=h(dx)$. Формула конечных приращений дает

$$h(\Delta x)=\frac{-l'_{x+\theta\Delta x}\Delta x}{l_x\Delta x}=\frac{l_{x+\theta\Delta x}\mu_{x+\theta\Delta x}}{l_x}={}_{\theta\Delta x}p_x\,\mu_{x+\theta\Delta x}=$$
$$=f_{T(x)}(t)\;(\theta\,\Delta x),\ \theta\in(0,1).$$

Поскольку $h(1)=f_{T(x)}(\theta)$, $h(dx)=f_{T(x)}(0)$, то в случае возрастания функции $f_{T(x)}(t)$ справедливо неравенство $h(1)>h(0)$, т.е. $q_x>\mu_x$, а в случае убывания — неравенство с обратным знаком.

Получим выражение для производной величины l_{x+t}. Для этого умножим равенство (1.3.4) на l_x, тогда из соотношения ${}_tp_x=l_{x+t}/l_x$ следует выражение для искомой производной:

$$\frac{d}{dt}(l_{x+t})=-l_{x+t}\,\mu_{x+t}. \tag{1.3.5}$$

Дифференцируя еще раз, получаем

$$\frac{d^2}{dt^2}(l_{x+t})=-\frac{d}{dt}(l_{x+t}\,\mu_{x+t}).$$

Последнее соотношение означает, что точки перегиба функции l_{x+t} соответствуют стационарным точкам функции $l_{x+t}\,\mu_{x+t}$.

Пример. Чему равна интенсивность смертности, если функция дожития $s(x)=e^{-0{,}01x}$, $x>0$?

Решение. Поскольку $s'(x)=-0{,}01s(x)$, то $\mu_x=-s'(x)/s(x)=0{,}01$ при всех $x>0$.

Пример. На возрастном интервале $(x,\ x+t)$ интенсивность смертности постоянна и равна $\mu=0{,}005$.

1. Найти значение ${}_tp_x$.

2. Выписать выражение для функции и плотности распределения случайной величины $T(x)$.

Решение.

1. ${}_tp_x=\exp\left(-\int\limits_0^t \mu_{x+1}dy\right)=\exp(-0{,}005\,t)$, $t>0$.

2. Функция распределения $F_{T(x)}(t)=1-\exp(-0{,}005\,t)$, $t>0$. Плотность распределения $f_{T(x)}(t)=0{,}005\exp(-0{,}005\,t)$, $t>0$.

Пример. Выразить производную $\frac{d}{dx}({}_tp_x)$ через ${}_tp_x$, μ_x, μ_{x+t}.

Решение. В силу (1.3.5)

$$\frac{d}{dx}({}_tp_x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{l_{x+t}}{l_x}\right)=\frac{l'_{x+t}l_x-l'_xl_{x+t}}{l_x^2}=\frac{l'_{x+t}}{l_x}-\frac{l'_x}{l_x}\frac{l_{x+t}}{l_x}={}_tp_x(\mu_x-\mu_{x+t}).$$

Замечание. Из полученной в данном примере формулы следует равенство

$$\frac{d}{dx}(\ln{}_tp_x)=\mu_x-\mu_{x+t}. \qquad (1.3.6)$$

Пример. Для целого положительного k найти выражение для $s(x)$ и величину предельного возраста w в следующих случаях.

1. $\mu_x=[s(x)]^k$.

2. $\mu_x=[s(x)]^{-k}$.

Решение.

1. Равенство для μ_x дает дифференциальное уравнение относительно $s(x)$:

$$s'(x)=-[s(x)]^{k+1},\ s(0)=1.$$

Разделение переменных дает

$$\frac{ds}{s^{k+1}}=-1,\ s(0)=1.$$

Интегрируя обе части последнего уравнения, с учетом начального условия получим $s^{-k}=1+kx$, откуда $s(x)=(1+kx)^{-1/k}$. Данное выражение определено при всех положительных x и стремится к нулю при неограниченном увеличении x, поэтому $w = \infty$.

2. В этом случае дифференциальное уравнение относительно $s(x)$ таково:

$$s'(x) = -[s(x)]^{1-k},\ s(0) = 1.$$

Решением данного уравнения служит функция $s(x) = (1 - kx)]^{1/k}$, которая определена при $x \in (0, 1/k)$, при этом $s(1/k) = 0$. Следовательно, $w = 1/k$.

Пример. Интенсивность смертности задается формулой $\mu_t = \ln(1 + t)$, $t > 0$. Найти аналитическое выражение для функции дожития. Построить график функции $y = s(t)$. Предполагая, что одному году соответствует значение $t = 0{,}02$, графически найти приближенное значение возраста, которое достигается с вероятностью 0,75.

Решение. Полагая $x = 0$ в равенстве

$$\ln(s(x+t)) - \ln(s(x)) = -\int_0^t \mu_{x+y}dy,$$

получаем

$$\ln(s(t)) = -\int_0^t \mu_y dy = t - (1+t)\ln(1+t).$$

Отсюда следует, что

$$s(t) = \frac{1}{1+t}\left(\frac{e}{1+t}\right)^t.$$

График приведен на рис. 1. Из него видно, что искомое значение возраста x расположено на интервале от 40 до 44 лет. Вычисляя

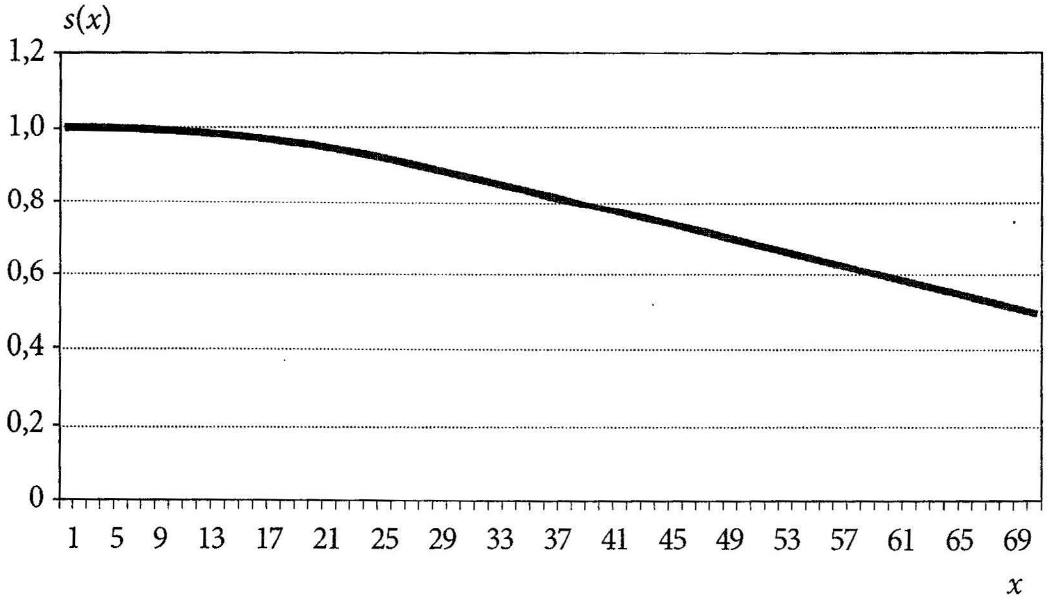

Рис. 1. График функции $y = s(t)$

значения $s(0{,}82) = 0{,}76665$ и $s(0{,}86) = 0{,}74833$, приходим к выводу, что искомый возраст равен 42 годам.

Пример. Выразить через q_x значение $\int_0^1 ({}_tp_x^m \cdot {}_tp_x \cdot {}_t\mu_{x+t})dt$ при натуральных m.

Решение. Обозначим функцию распределения случайной величины $T(x)$, равную ${}_tq_x$, через $y(t)$, плотность распределения $T(x)$ равна ${}_tp_x \cdot \mu_{x+t}$; при увеличении t от 0 до 1 y возрастает от 0 до q_x, поэтому исходный интеграл примет вид

$$\int_0^{q_x} (1-y)^m dy = -\frac{(1-y)^{m+1}}{m+1}\Bigg|_0^{q_x} = \frac{1-(1-q_x)^{m+1}}{m+1}.$$

Пример. При условии ${}_tq_x = 1 - \left(\frac{a+x}{a+x+t}\right)^m$, где a, $m > 0$, найти выражение для μ_{x+t}.

Решение. Функция ${}_tq_x$ является функцией распределения случайной величины $T(x)$, при дифференцировании ее по t получаем плотность распределения $T(x)$, равную ${}_tp_x \cdot \mu_{x+t}$:

$$\frac{d}{dt}({}_tq_x) = \frac{m}{a+x}\left(\frac{a+x}{a+x+t}\right)^{m+1} = {}_tp_x\,\mu_{x+t} = (1-{}_tq_x)\mu_{x+t} = \left(\frac{a+x}{a+x+t}\right)^m \mu_{x+t},$$

откуда $\mu_{x+t} = \dfrac{m}{a+x+t}$.

Пример. Доказать, что при всех $t > 0$

$$\int_0^t \mu_{x+s}ds + \ln\int_0^\infty {}_sp_x\,\mu_{x+s}\,ds = 0.$$

Решение. Обозначим выражение, указанное в условии, через $g(t)$. Поскольку произведение ${}_sp_x \cdot \mu_{x+s}$ является плотностью распределения случайной величины $T(x)$, а ${}_sq_x$ — функцией распределения этой случайной величины, то

$$\int_t^\infty {}_sp_x\,\mu_{x+s}ds = \int_0^\infty {}_sp_x\,\mu_{x+s}ds - \int_0^t {}_sp_x\,\mu_{x+s}ds = 1 - {}_tq_x = {}_tp_x.$$

Следовательно,

$$g(t) = \int_0^t \mu_{x+s}ds + \ln({}_tp_x).$$

Дифференцируя $g(t)$ по переменной t, получим

$$g'(t) = \mu_{x+t} - \frac{{}_tp_x\mu_{x+t}}{{}_tp_x} \equiv 0$$

при всех $t>0$. Кроме того, поскольку ${}_0p_x=1$, то $g(0)=0$. Тогда $g(t)=0$ при $t>0$.

Пример. В течение возрастного года $(x,\ x+1)$ интенсивность смертности постоянна и равна μ_x. Требуется выразить μ_x через q_x.

Решение. Из определения вероятности дожития

$$p_x=\frac{s(x+1)}{s(x)}=\frac{l_{x+1}}{l_x}=e^{-\mu_x},$$

логарифмируя последнее равенство, получаем

$$\mu_x=-\ln(1-q_x).$$

Пример. Вычислить значение $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left[1-\frac{1}{{}_kp_x}\int\limits_k^{k+1}{}_sp_x\,\mu_{x+s}ds\right]$.

Решение. Поскольку

$$\int\limits_k^{k+1}{}_sp_x\,\mu_{x+s}ds={}_{k+1}q_x-{}_kq_x={}_{k|}q_x,$$

то выражение в квадратных скобках равно

$$1-\frac{d_{x+k}}{l_{x+k}}=1-q_{x+k}=p_{x+k}.$$

Следовательно, искомое значение произведения в силу (1.2.3) равно ${}_np_x$.

Пример. При условии $\mu_{x+t}-\mu_x=0{,}02e^{0{,}01t}(1+x/50)$ найти $\frac{{}_{10}p_{50}}{{}_{10}p_{45}}$.

Решение. Равенство (1.3.6) означает, что

$$\frac{d}{dx}(\ln {}_tp_x)=-0{,}02e^{0{,}01t}(1+x/50),$$

откуда

$$\ln{}_tp_b-\ln{}_tp_a=\ln\frac{{}_tp_b}{{}_tp_a}=-0{,}02e^{0{,}01t}\int\limits_a^b(1+x/50)dx=$$

$$=-0{,}02e^{0{,}01t}(b-a+0{,}01x^2|_a^b)=-0{,}02e^{0{,}01t}(b-a+0{,}01(b^2-a^2)).$$

Возьмем $t=10$, $a=45$, $b=50$, отсюда получим $\ln\frac{{}_{10}p_{50}}{{}_{10}p_{45}}=-0{,}2155$, следовательно, искомая величина равна

$$\frac{{}_{10}p_{50}}{{}_{10}p_{45}}=e^{-0{,}2155}=0{,}80613.$$

1.4. Моменты случайной величины предстоящей продолжительности жизни

Математическое ожидание случайной величины $T(x)$ называется полной ожидаемой продолжительностью предстоящей для (x) жизни и имеет специальное обозначение $\overset{0}{e}_x$:

$$\overset{0}{e}_x = ET(x) = \int_0^\infty t dF_{T(x)}(t).$$

Здесь и всюду далее предполагается конечность величины $\overset{0}{e}_x$ и наличие плотности у распределения случайной величины $T(x)$. Из (1.3.3) следует

$$\overset{0}{e}_x = \int_0^\infty t f_{T(x)}(t)dt = \int_0^\infty t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt.$$

Для получения более простого выражения для $\overset{0}{e}_x$ преобразуем интеграл в правой части последнего равенства:

$$\int_0^A t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt = -\int_0^A t\, d({}_tp_x) = -t\, {}_tp_x \big|_0^A + \int_0^A {}_tp_x\, dt = -A\, {}_Ap_x + \int_0^A {}_tp_x\, dt.$$

Поскольку

$$A\, {}_Ap_x = A\int_A^\infty dF_{T(x)}(t) < \int_A^\infty t dF_{T(x)}(t),$$

при этом последний интеграл стремится к нулю при $A \to \infty$ вследствие конечности величины $\overset{0}{e}_x$, то

$$\overset{0}{e}_x = \lim_{A\to\infty} \int_0^A t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt = \int_0^\infty {}_tp_x dt.$$

Следовательно, для $\overset{0}{e}_x$ мы получили более простое выражение:

$$\overset{0}{e}_x = \int_0^\infty {}_tp_x dt. \tag{1.4.1}$$

Пример. Требуется найти величину $\overset{0}{e}_x$, если $\mu_{x+t} = \mu$ при $t > 0$.

Решение. Вероятность ${}_tp_x$ при заданном условии равна $e^{-\mu t}$, $t > 0$. Значит,

$$\overset{0}{e}_x = \int_0^\infty {}_tp_x dt = \frac{1}{\mu}.$$

Рассмотрим случайную величину предстоящей для (x) жизни между возрастами x и $x + n$, которую обозначим $T_n(x) = \min(n, T(x))$.

Функция распределения $F_{T_n(x)}(t)$ случайной величины $T_n(x)$ определяется как

$$F_{T_n(x)}(t)=\begin{cases}F_{T(x)}(t),\ 0<t\le n,\\ 1,\ t>n.\end{cases} \qquad (1.4.2)$$

Математическое ожидание этой случайной величины называется ожидаемой продолжительностью предстоящей для (x) жизни между возрастами x и $x+n$ и обозначается $\overset{0}{e}_{x:\overline{n}|}$. Повторяя выкладки для $\overset{0}{e}_x$, легко получить, что

$$\overset{0}{e}_{x:\overline{n}|}=\int_0^{\infty} {}_tp_x dt.$$

Получим простое выражение для второго момента случайной величины $T(x)$. По определению второй момент этой случайной величины есть

$$E(T(x))^2=-\int_0^{\infty} t^2 d({}_tp_x)=-\lim_{A\to\infty}\int_0^{A} t^2 d({}_tp_x).$$

Будем предполагать существование конечной величины $E(T(x))^2$. В таком случае

$$A^2{}_Ap_x=A^2\int_A^{\infty} d({}_tq_x)\le\int_A^{\infty} t^2 d({}_tq_x)\to 0$$

при $A\to\infty$. При $A>0$

$$-\int_0^{A} t^2 d({}_tp_x)=-t^2{}_tp_x\Big|_0^A+\int_0^{A} 2t\,{}_tp_x dt=-A^2{}_Ap_x+2\int_0^{A} t\,{}_tp_x dt.$$

Устремляя в последнем равенстве значение A к бесконечности, получаем

$$E(T(x))^2=2\int_0^{\infty} t\,{}_tp_x dt. \qquad (1.4.3)$$

Соотношения (1.4.1) и (1.4.3) дают простое выражение для дисперсии $T(x)$:

$$DT(x)=2\int_0^{\infty} t\,{}_tp_x dt-(\overset{0}{e}_x)^2.$$

Для случайной величины предстоящего срока жизни между возрастами x и $x+n$ для (x) из (1.4.2) следует равенство

$$E(T_n(x))^2=2\int_0^{n} t\,{}_tp_x dt,$$

из которого выражение для дисперсии $T_n(x)$ получается в виде

$$DT_n(x) = 2\int_0^n t\ {}_tp_x dt - (\overset{0}{e}_{x:\overline{n}|})^2.$$

Пример. Получить выражение для среднего и дисперсии $T_n(x)$ в случае, когда $\mu_{x+t} = \mu > 0$ при всех $t \geq 0$.

Решение. Поскольку ${}_tp_x = e^{-\mu x}$, то

$$\overset{0}{e}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\mu t} dt = \frac{1 - e^{-\mu n}}{\mu}.$$

Кроме того,

$$\int_0^n t\ {}_tp_x dt = \int_0^n t\ e^{-\mu t} dt = \frac{1}{\mu^2}\int_0^{\mu n} ue^{-u} du = -\frac{(1+u)e^{-u}}{\mu^2}\Big|_0^n = \frac{1 - e^{-\mu n} - \mu n e^{-\mu n}}{\mu^2},$$

отсюда

$$DT_n(x) = \frac{2 - 2e^{-\mu n} - 2\mu n e^{-\mu n} - 1 - e^{-2\mu n} + 2e^{-\mu n}}{\mu^2} = \frac{1 - 2\mu n e^{-\mu n} - e^{-2\mu n}}{\mu^2}.$$

1.5. Округленная случайная величина предстоящей продолжительности жизни

Непрерывная случайная величина $T(x)$ и связанная с ней $T_n(x)$ описываются своими распределениями, параметры которых могут быть оценены лишь приближенно на основе статистических таблиц. Поэтому с практической точки зрения важнее иметь распределение дискретной случайной величины предстоящего срока жизни для (x). Округленной (по году) случайной величиной предстоящей продолжительности жизни для (x) называется величина $K(x) = [T(x)]$. Здесь через $[a]$ и $\{a\}$ обозначаются целая и дробная части соответственно вещественного числа a: $a = [a] + \{a\}$. Дробная часть $\{a\} \in [0, 1)$.

Получим распределение величины $K(x)$ через введенные ранее функции дожития. По определению случайной величины $K(x)$ при всех неотрицательных целых k

$$P(K(x) = k) = P(T(x) \in [k, k+1)) = {}_{k|}q_x. \tag{1.5.1}$$

В силу (1.2.5) выражение для распределения $K(x)$ можно записать в другом виде:

$$P(K(x) = k) = {}_kp_x\, q_{x+k}. \tag{1.5.2}$$

Для краткости обозначим $P(K(x)=k)$ через g_k. Тогда функция распределения $F_{K(x)}(k)$ случайной величины $K(x)$ строится исходя из равенств

$$F_{K(x)}(0)=g_0,\ F_{K(x)}(k+1)=F_{K(x)}(k)+g_{k+1},\ k=0,1,2,\ldots$$

Математическое ожидание случайной величины $K(x)$ обозначается через e_x:

$$EK(x)=e_x=\sum_{k=0}^{\infty}kP(K(x)=k)=\sum_{k=0}^{\infty}k\ {}_{k|}q_x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}k\,g_k.$$

Предполагая конечность величины e_x, т.е. сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty}k\ {}_{k|}q_x$, получим более простое выражение для математического ожидания случайной величины $K(x)$. Для этого через s_k обозначим разность $1-F_{K(x)}(k)={}_{k+1}p_x$, $k=0,1,2,\ldots$ Далее,

$$g_k=F_{K(x)}(k)-F_{K(x)}(k-1)=\Delta F_{K(x)}(k-1)=s_{k-1}-s_k=-\Delta s_{k-1},\ k=1,2,3,\ldots$$

Здесь через Δa_k выражена разность $a_{k+1}-a_k$ для любой последовательности a_k. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}k\,g_k=\sum_{k=1}^{n}k\,(s_{k-1}-s_k)=s_0-s_1+2s_1-2s_2+3s_2-3s_3+\ldots+ns_{n-1}-ns_n=$$
$$=s_0+s_1+s_2+\ldots+s_{n-1}-ns_n=\sum_{k=0}^{n-1}s_k-ns_n.$$

По определению величин s_k произведение

$$ns_n=n(g_{n+1}+g_{n+2}+\ldots)\le\sum_{k=n+1}^{\infty}k\,g_k,$$

при этом остаток сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty}kg_k$, именно $\sum_{k=n+1}^{\infty}kg_k$, стремится к нулю при $n\to\infty$. Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}k\,g_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}s_k=\sum_{k=0}^{\infty}{}_{k+1}p_x.$$

Из последнего равенства имеем простое выражение для математического ожидания $K(x)$:

$$e_x=\sum_{k=1}^{\infty}{}_kp_x. \tag{1.5.3}$$

Для получения выражения для дисперсии случайной величины $K(x)$ будем предполагать, что ее второй момент конечен:

$$E(K(x))^2=\sum_{k=0}^{\infty}k^2g_k<\infty.$$

Получим простое выражение для этого второго момента. Как и в случае математического ожидания,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 g_k = \sum_{k=1}^{n} k^2 (s_{k-1} - s_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) s_k - n^2 s_n.$$

Сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 g_k$ означает, что

$$n^2 s_n = n^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k^2 g_k \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно,

$$E(K(x))^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 g_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} k^2 g_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) s_k = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) s_k.$$

Таким образом, для второго момента $K(x)$ получаем равенство

$$E(K(x))^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\,{}_{k+1}p_x = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)\,{}_k p_x,$$

из которого следует формула для дисперсии

$$DK(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\,{}_{k+1}p_x - e_x^2.$$

Пример. Для случая, когда $\mu_{x+t} = \mu > 0$ при всех $t \geq 0$, получить выражения для среднего и дисперсии $K(x)$ и при $\mu = 0{,}02$ найти значения $\overset{0}{e}_x$, e_x. Убедиться в том, что $e_x \neq \overset{0}{e}_x$.

Решение.

Поскольку ${}_k p_x = e^{-\mu k}$, то

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu k} = \frac{e^{-\mu}}{1 - e^{-\mu}} = \frac{1}{e^{\mu} - 1}.$$

Следует заметить, что при всяком $q \in (0, 1)$ сумма сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k q^k$ равна

$$q \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = q \frac{d}{dq}\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right) = q \frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Взяв $q = e^{-\mu}$, получим

$$E(K(x))^2 = \frac{2q}{(1-q)^2} - \frac{q}{1-q} = \frac{q+q^2}{(1-q)^2} = \frac{e^{-\mu} + e^{-2\mu}}{(1-e^{-\mu})^2},$$

$$DK(x) = \frac{e^{-\mu}}{(1-e^{-\mu})^2}.$$

Из этих равенств следует $\overset{0}{e}_x = 1/\mu = 50 \geq e_x = 49{,}50167.$

Замечание. Данный пример показывает, что математическое ожидание непрерывной случайной величины со значениями в неотрицательной части вещественной прямой является целым числом, в то же время математическое ожидание целой части этой случайной величины не является целым. Таким образом, из условия $K(x)=[T(x)]$ не следует равенство $e_x=[\overset{0}{e}_x]$. Как отмечалось выше, на практике имеются статистические таблицы смертности, содержащие данные по возрастам с годовым интервалом. Характеристики дожития внутри годового интервала получаются при использовании специальных допущений, рассматриваемых ниже.

1.6. Гипотезы распределения смертей между целочисленными возрастами

Статистические таблицы содержат данные наблюдений по целочисленным возрастам, в частности по значениям l_x, μ_x, где $x=0, 1, 2, 3,\ldots$ В то же время, чтобы получить характеристики, например, случайной величины $T(x)$, необходимо иметь значения l_{x+t}, μ_{x+t} при $t\in[0,1)$. Для получения таких данных внутри целочисленных возрастов рассмотрим следующие предположения.

А. Гипотеза равномерного распределения смертей внутри каждого интервала $(x, x+1)$, $x=0, 1, 2,\ldots$

В. Гипотеза постоянной интенсивности смертности внутри каждого интервала $(x, x+1)$, $x=0, 1, 2,\ldots$

Рассмотрим сначала гипотезу равномерного распределения смертей. В соответствии с ней функция l_{x+t} переменной t является линейной:

$$l_{x+t}=(1-t)l_x+tl_{x+1},\ t\in[0,1].$$

Это означает линейную зависимость l_{x+t} от переменной t внутри каждого интервала $(x, x+1)$, $x=0, 1, 2,\ldots$ Из данного предположения вытекает, что $s(x+t)=(1-t)s(x)+ts(x+1)$. При данной гипотезе вероятность дожития составляет

$${}_tp_x=\frac{l_{x+t}}{l_x}=1-t+tp_x=1-tq_x,\ t\in[0,1);$$

откуда получается простая формула

$${}_tq_x=tq_x,\ t\in[0,1). \tag{1.6.1}$$

Гипотеза равномерного распределения смертей дает соотношение $l'_{x+t}=l_{x+1}-l_x$, откуда

$$\mu_{x+t} = \frac{l_x - l_{x+1}}{(1-t)l_x + tl_{x+1}} = \frac{1-p_x}{(1-t)+tp_x} = \frac{q_x}{1-tq_x}, \ t\in[0,\,1).$$

Из (1.6.1) следует, что плотность распределения случайной величины $T(x)$, равная произведению ${}_tp_x\,\mu_{x+t}$, при выполнении гипотезы равномерного распределения смертей равна q_x.

Пример. Если для интервала $[x,\,x+1)$ принимается гипотеза равномерного распределения смертей, то при указанном x требуется выразить $\overset{0}{e}_{x:\overline{1}|}$ через q_x.

Решение. В соответствии с (1.4.2)

$$\overset{0}{e}_{x:\overline{1}|} = \int_0^1 (1-\,tq_x)dt = 1-0{,}5q_x.$$

Для случайной величины $T(x)$ через $S(x)$ обозначим ее дробную часть: $S(x)=T(x)-K(x)$. Считая гипотезу равномерного распределения смертей выполненной для каждого интервала $(x,\,x+1)$, $x=0,1,2,\ldots$, легко показать, что целая и дробная части случайной величины $T(x)$ независимы, при этом $S(x)$ имеет равномерное на $(0,1)$ распределение. Действительно, при любых x, $k=0,1,2,\ldots$ и произвольном $t\in[0,\,1)$

$${}_{k|t}q_x = P(T(x)\in[k,\,k+t]) = P(K(x)=k,\,S(x)\in[0,t]) =$$

$$= {}_kp_x\cdot q_{x+k+t} = {}_kp_x\cdot tq_{x+k} = t\cdot{}_kp_x\,q_{x+k}.$$

Поскольку ${}_kp_x\cdot q_{x+k}=P(K(x)=k)$, то отсюда $P(K(x)=k,\ S(x)\in[0,t]) = t\,P(K(x)=k)$, из чего следует $P(K(x)=k,\ S(x)\in[0,t])=t\cdot{}_kp_x\,q_{x+k}$.

Таким образом,

$$P(S(x)\le t\,|\,K(x)=k) = \frac{P(S(x)\le t, K(x)=k)}{P(K(x)=k)} = t,$$

что означает независимость $K(x)$ и $S(x)$ и равномерность на $(0,1)$ распределения $S(x)$.

Пример. Доказать, что при условии равномерности распределения смертей на каждом целочисленном интервале для любого целого x справедливы равенства

$$\overset{0}{e}_x = e_x + 0{,}5;$$

$$D(T(x)) = D(K(x)) + 1/12.$$

Решение.

$$\overset{0}{e}_x = E(T(x)) = E(K(x)+S(x)) = e_x + 0{,}5;$$

$$D(T(x)) = E(K(x)+S(x))^2 - (e_x+0{,}5)^2 =$$

$$D(K(x)) + E(K(x)) - e_x + D(S(x)) = D(K(x)) + 1/12.$$

Пример. Доказать, что при условии равномерности распределения смертей на каждом целочисленном интервале для любого целого x справедливо равенство

$$\mathrm{Cov}(T(x), K(x)) = \mathrm{Var}(K(x)).$$

Решение. Исходя из определения ожидаемой предстоящей продолжительности жизни

$$\mathrm{Cov}(T(x), K(x)) = E(T(x)K(x)) - e_x \overset{0}{e}_x.$$

Кроме того, из представления случайной величины $T(x) = K(x) + S(x)$ и независимости случайных величин $K(x)$ и $S(x)$ следует

$$E(T(x)K(x)) = E(K(x))^2 + E(S(x)K(x)) = E(K(x))^2 + 0{,}5E(K(x)) =$$
$$= E(K(x))^2 + 0{,}5e_x.$$

Значит, искомая ковариация равна разности

$$E(T(x)K(x)) - e_x \overset{0}{e}_x = E(K(x))^2 + 0{,}5e_x - e_x(e_x + 0{,}5) =$$
$$= E(K(x))^2 - (e_x)^2 = D(K(x)).$$

Рассмотрим теперь гипотезу B — предположение постоянной интенсивности смертности на каждом интервале $(x, x+1), x = 0, 1, 2, \ldots$ При данной гипотезе полагается $\mu_{x+t} = \mu_x$ при всех $t \in [0, 1)$ и при всех $x = 0, 1, 2, \ldots$ В таком случае при $t \in [0, 1)$ вероятность ${}_tp_x = e^{-\mu t}$. Кроме того, для значений t, $u \in [0, 1)$, таких, что $t + u \in [0, 1)$, вероятность

$${}_uq_{x+t} = 1 - \frac{l_{x+t+u}}{l_{x+t}} = 1 - \frac{e^{-\mu(t+u)}}{e^{-\mu t}} = 1 - e^{-\mu t}$$

не зависит от x и t. Для гипотез A и B основные функции дожития сведены в табл. 1.

Таблица 1

Некоторые функции дожития

Функция	Гипотеза A	Гипотеза B
${}_tp_x (0 \le t < 1)$	$1 - tq_x$	$e^{-\mu t}$
${}_tq_x (0 \le t < 1)$	tq_x	$1 - e^{-\mu t}$
${}_uq_{x+t} (0 \le t,\ u < 1,\ 0 \le t + u < 1)$	$\frac{uq_x}{1 - tq_x}$	$1 - e^{-\mu u}$
$\mu_{x+t} (0 \le t < 1)$	$\frac{q_x}{1 - tq_x}$	μ_x
${}_tp_x\, \mu_{x+t} (0 \le t < 1)$	q_x	$\mu_x e^{-\mu t}$

Пример. Для некоторой группы населения предполагается равномерность распределения смертей между целочисленными возрастами и $q_{60}=0{,}023$. Найти значение $\mu_{60,75}$.

Решение. В данном случае $t=0{,}75$, $x=60$. Тогда

$$\mu_{60+0,75}=0{,}023/(1-0{,}75\cdot 0{,}023)=0{,}0234.$$

Пример. При заданных значениях $q_{69}=0{,}0208$, $q_{70}=0{,}022$, $q_{71}=0{,}0257$, $q_{72}=0{,}0295$ согласно гипотезе равномерного распределения смертей требуется вычислить ${}_{0,2}q_{69,25}$; ${}_{2|1}q_{69,25}$.

Решение. Значение ${}_{0,2}q_{69,25}$ согласно табл. 1 равно

$$0{,}2\cdot 0{,}0208/(1-0{,}25\cdot 0{,}0208)=0{,}00418.$$

Из (1.2.3) следует ${}_2p_{69}=p_{69}\,p_{70}=0{,}957658$, ${}_2p_{71}=p_{71}\,p_{72}=0{,}945558$, ${}_3p_{69}=p_{69}\,p_{70}\,p_{71}=0{,}933046$, откуда

$${}_{2|1}q_{69,25}={}_2p_{69,25}\cdot p_{71,25}=$$

$$=\frac{l_{71,25}}{l_{69,25}}\left(1-\frac{l_{72,25}}{l_{71,25}}\right)=\frac{0{,}25l_{72}+0{,}75l_{71}}{0{,}25l_{70}+0{,}75l_{69}}\left(1-\frac{0{,}25l_{73}+0{,}75l_{72}}{0{,}25l_{72}+0{,}75l_{71}}\right)=$$

$$=\frac{0{,}25\,{}_3p_{69}+0{,}75\,{}_2p_{69}}{0{,}25p_{69}+0{,}75}\left(1-\frac{0{,}25\,{}_2p_{71}+0{,}75p_{71}}{0{,}25p_{71}+0{,}75}\right)=0{,}025473.$$

Пример. Принимая гипотезу постоянной интенсивности смертности между целочисленными возрастами, требуется найти значение μ_{63+t}, $t\in[0,1)$, если для возраста $x=0,1,2,\ldots,100$ известно значение $l_x=100\,000-1000x$.

Решение. Значение μ_{63+t}, $t\in[0,1)$, равное μ_{63}, вычисляется из равенства $l_{x+1}=l_xe^{-\mu x}$, откуда находим

$$\mu_{63}=\ln((1\,000\,(100-63))/(1\,000\,(100-64)))=0{,}027399.$$

Для гипотезы равномерного распределения смертей величина l_x как функция возраста x является кусочно-линейной, для гипотезы постоянной интенсивности смертности на каждом интервале между соседними целочисленными возрастами l_x убывает экспоненциально. Как следует из нижеприведенного примера, кроме этих гипотез возможны и другие предположения относительно характера изменения параметров дожития на нецелочисленных возрастах.

Пример. l_x является квадратичной функцией от возраста на промежутке $[x, x+2]$. При заданных $p_x=0{,}97$, $p_{x+1}=0{,}95$ требуется определить величину ${}_{0,51}p_x$.

Решение. На отрезке $[0,2]$ квадратичная функция определяется своими значениями в точках 0, 1 и 2. Подставляя в качестве t эти значения, нетрудно убедиться, что величина l_{x+t}, $t\in[0,2]$, имеет вид

$$l_{x+t}=0{,}5(t-1)(t-2)\,l_x+0{,}5t(t-1)\,l_{x+2}-t(t-2)\,l_{x+1}.$$

Деля последнее равенство на l_x и полагая $t=0{,}51$, получаем

$$ {}_{0,51}p_x=0{,}5(0{,}51-1)(0{,}51-2)+0{,}5\cdot 0{,}51(0{,}51-1)-$$
$$-0{,}51\cdot(0{,}51-2)\,p_xp_{x+1}=0{,}987.$$

1.7. Аналитические законы смертности

Для наглядного представления законов смертности полезно оперировать не громоздкими таблицами различных характеристик, а простыми формулами, из которых эти таблицы при необходимости можно получить. При этом параметры формул должны быть определены в соответствии с имеющейся статистикой смертности. Помимо того, что такие формулы удобны в использовании, они часто помогают сделать качественные выводы о смертности в интересующем классе людей, что бывает полезно в деле страхования жизни. Приведем несколько аналитических законов смертности (табл. 2), которые определяются через величину интенсивности смертности. Эти законы называются по фамилиям своих авторов.

Таблица 2

Аналитические характеристики смертности

Автор	μ_x	$s(x)$	Ограничения на параметры и переменные
Де Муавр (1729)	$(w-x)^{-1}$	$1-x/w$	$0\le x\le w$
Гомперц (1825)	Bc^x	$\mathrm{Exp}(-(B/\ln c)(c^x-1))$	$B>0, c>1, x\ge 0$
Мэйкхам (1860)	$\mathrm{A}+Bc^x$	$\mathrm{Exp}(-\mathrm{A}x-(B/\ln c)(c^x-1))$	$B>0, A>-B, c>1, x\ge 0$
Вейбулл (1829)	kx^n	$\mathrm{Exp}(-(k/(n+1))x^{n+1})$	$k>0, n>0, x\ge 0$

Из табл. 2 видно, что закон Мэйкхама при $A=0$ превращается в закон Гомперца. Закон Мэйкхама позволяет объяснить возможные особенности интенсивности смертности не только возрастом, но и другими факторами, поскольку формула для силы смертности здесь разбита на две составляющие. Первая, соответствующая параметру A, не зависит от возраста x, а вторая обусловлена возрастом. Значения параметров любого аналитического закона трудно подобрать подходящими для всех возрастов сразу. В частности, для первого года жизни действуют другие законы смертности. Кроме того, в 19–20 лет наблюдается незначительное увеличение уровня смертности, который уменьшается к 30 годам.

Пример. Для закона Мэйкхама со значениями параметров A, B, c, равными соответственно 0,001186; 0,0000714; $10^{0,04}$, вычислить ${}_{15}p_{55}$.

Решение. Из равенств

$$l_{70}=l_0 e^{-70A-\frac{B}{\ln c}(c^{70}-1)},\quad l_{55}=l_0 e^{-55A-\frac{B}{\ln c}(c^{55}-1)},$$

подставляя значения A, B, c, получаем

$${}_{15}p_{55}=\frac{l_{70}}{l_{55}}=e^{-15A-\frac{B}{\ln c}c^{55}(c^{15}-1)}=0{,}681094.$$

Пример. Для закона Де Муавра со значением $w=100$ вычислить $\overset{0}{e}_{65:\overline{10}|}$; μ_{65} и q_{65}.

Решение. Для данного закона величина ${}_tp_x$ равна $\frac{w-x-t}{w-x}$. Поэтому

$$\overset{0}{e}_{65:\overline{10}|}=\int_0^{10}\left(1-\frac{t}{100-65}\right)dt=10-50/35=8{,}571429;$$

$$q_{65}=1/(100-65)=0{,}028571,\ \mu_{65}=1/(100-65)=0{,}028571.$$

Последнее означает совпадение μ_x и q_x в данном законе:

$$\mu_x=q_x=1/(w-x).$$

Пример. Для закона Вейбулла со значениями $k=0{,}02$ и $n=0{,}04$ вычислить μ_{65} и q_{65}.

Решение. $\mu_{65}=0{,}02\cdot 65^{0,04}=0{,}023635$, $s(65)=0{,}228286$, $s(66)=0{,}222952$, отсюда $q_{65}=1-s(66)/s(65)=0{,}023365$. Таким образом, μ_{65} превосходит по величине q_{65}, хотя различие между этими параметрами лишь в четвертом знаке.

1.8. Селективные и окончательные таблицы смертности

Значения величин вероятностей дожития, например q_x, l_x, могут быть вычислены только на основе статистических наблюдений в практике страхования. Страховая компания составляет таблицы дожития не для общей группы населения, а для различных групп страхователей, заключающих договоры. В зависимости от вида страхования значения таблиц смертности различны. Например, договоры страхования жизни часто стремятся заключить люди, имеющие проблемы со здоровьем. В то же время полисы по страхованию пенсий заключают люди, надеющиеся прожить достаточно долго и имеющие для этого основания вследствие достаточно хорошего состояния здоровья. Страховая компания должна учитывать эти различия в классах полисов, группах страхователей, социальные факторы, образ жизни каждого страхователя и многие другие факторы. Кроме того, при заключении договора, связанного с условием дожития или смерти застрахованного, проводится селекция возможных клиентов. При селекции должно явно или неявно обследоваться состояние здоровья клиента. Например, при коллективном страховании жизни можно страховать на небольшой период времени работников, занятых физическим трудом, заранее при этом зная, что на данной работе могут находиться только достаточно здоровые люди. В то же время при продаже полисов по страхованию жизни и здоровья для выезжающих за границу туристов какой-либо отбор провести невозможно, поэтому необходимо иметь дело с общими (агрегированными) таблицами. Таблицы смертности, полученные для лиц, прошедших отбор по состоянию здоровья, будем называть селективными (отборочными). Вполне естественно полагать, что параметры дожития для отобранного круга клиентов будут другими, нежели для общего круга людей аналогичного возраста.

Рассмотрим основные понятия и обозначения, связанные с отборочными таблицами. Будем через $[x]+t$ обозначать человека в возрасте $x+t$, который прошел отбор по состоянию здоровья в возрасте x. Для каждого такого человека вероятность умереть в течение ближайшего года равна $q_{[x]+t}$. Таким образом, здесь для использования этого параметра нужно иметь не вектор с координатами q_x, $x=0,1,2,\ldots$, а матрицу, соответствующую значениям x и t. Вероятность прожить не менее года для $[x]+t$ выражается через $p_{[x]+t}$, при этом $p_{[x]+t}=1-q_{[x]+t}$. Другие обозначения для селективных таблиц получаются естественным образом. Например, величина ${}_{n|m}q_{[x]+t}$ соответствует вероятности умереть на интервале $(x+t+n, x+t+n+m)$ для $[x]+t$, т.е. человека возраста $x+t$, прошедшего отбор в возрасте x. Величина ${}_tq_{[x]+0}$ обозначается просто как ${}_tq_{[x]}$.

Характеристики функции выживания у лиц, прошедших отбор, лучше, нежели у всей группы населения, однако с течением времени эффект отбора исчезает. Поэтому не менее очевидно, что, например, вероятность умереть в течение ближайшего года для человека возраста 55 лет практически такая же, как для человека того же возраста, прошедшего самый строгий отбор 30 лет назад. Поэтому введем еще одно понятие. Величина r называется периодом отбора, если для всякого $j>0$ выполнено равенство $q_{[x-j]+j+r} \approx q_{[x]+r}$. Приближенное равенство указывает на то, что эффектом отбора в имеющейся таблице можно пренебречь. В таком случае величина $q_{[x]+r}$ считается равной q_{x+r}. Если составить таблицу величин $q_{[x]+t}$, откладывая x по горизонтали и t по вертикали, то ее строки начиная с $r+1$-й принято называть предельной таблицей. В приведенной в качестве примера табл. 3 период отбора r взят равным 2.

Таблица 3

Пример величин вероятностей смертности

Возраст $[x]$	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	q_{x+2}	Возраст $x+2$
75	0,018748	0,031025	0,074582	77
76	0,019935	0,033313	0,081497	78
77	0,021183	0,035746	0,088968	79

Из табл. 3 видно, что

$$q_{77}=0{,}074582>q_{[76]+1}=0{,}033313>q_{[77]}=0{,}021183.$$

В общем случае, как уже отмечалось, справедливы неравенства $q_{[x]}<q_{[x-1]+1}<q_x$. Среднее число доживших до возраста $x+t$ и прошедших в возрасте x отбор обозначается как $l_{[x]+t}$. Тогда по определению вероятности $p_{[x]+t}$ справедливо

$$l_{[x]+t+1}=l_{[x]+t}p_{[x]+t},\quad t=0,1,2,\ldots,r-1,$$

при этом $p_{[x]+t}=1-q_{[x]+t}$. При $t\geq r$ полагаем $l_{[x]+t}=l_{x+t}$. Поэтому значения $l_{[x]+r-1}$ и l_{x+r-1} связаны неравенством

$$l_{[x]+r-1}=l_{x+r}/p_{[x]+r-1}<l_{x+r}/p_{x+r-1}=l_{x+r-1},$$

из которого следует, что

$$l_{[x]+r}=l_{x+r}<l_{[x]+r-1}<l_{x+r-1}.$$

В частности, при $r=2$ последняя система неравенств имеет вид $l_{x+2}<l_{[x]+1}<l_{x+1}$. Через величины $l_{[x]+t}$ определяются вероятности смерти на возрастном интервале $[x+t+n,\ x+t+n+m)$ для человека возраста $x+t$, прошедшего отбор в возрасте x:

$$ {}_{n|m}q_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t+n} - l_{[x]+t+n+m}}{l_{[x]+t}}. $$

Среднее число умерших на $x+t+1$-м возрастном году среди тех представителей наблюдаемой группы, которые в возрасте x прошли отбор, равно

$$ d_{[x]+t} = l_{[x]+t} - l_{[x]+t+1}. $$

Вероятность дожития до возраста $x+t+s$ для человека возраста $x+t$, прошедшего в возрасте x отбор, обозначается как

$$ {}_{s}p_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t+s}}{l_{[x]+t}}. $$

Пример. В соответствии с табл. П.2 (см. Приложение) требуется определить вероятность смерти:

для [59] на 61-м году жизни;

для [59] + 1 на 63-м году жизни.

Решение. Вероятность смерти на 61-м году жизни для [59] равна вероятности умереть на возрастном интервале от 60 до 61 года:

$$ {}_{1|}q_{[59]} = \frac{l_{[59]+1} - l_{61}}{l_{[59]}} = \frac{29\,872{,}344 - 29\,606{,}239}{30\,058{,}648} = 0{,}0088528. $$

Искомая вероятность смерти для $[59]+1$ на 63-м году жизни вычисляется как

$$ {}_{2|}q_{[59]+1} = \frac{l_{[59]+3} - l_{63}}{l_{[59]+1}} = \frac{29\,132{,}138 - 28\,615{,}051}{29\,872{,}344} = 0{,}0173. $$

Пример.

1. Сравнить вероятность $q_{[63]+1}$, полученную исходя из табл. П.2, с вероятностью q_{64} из табл. П.1.

2. Сравнить $d_{[57]+1}$, рассчитанную по табл. П.2, с величиной d_{58} из табл. П.1.

Решение.

1. По данным табл. П.2 получаем

$$ q_{[63]+1} = (l_{[63]+1} - l_{65}) / l_{[63]+1} = 0{,}0124472. $$

Согласно табл. П.1 величина $q_{64} = 0{,}03339$.

2. Исходя из табл. П.2 вычисляем $d_{[57]+1} = l_{[57]+1} - l_{59} = 30\,664{,}702 - 30\,435{,}225 = 229{,}477$. В то же время табл. П.1 дает $d_{58} = 1526$.

Пример. Для некоторой таблицы смертности с селективным периодом, равным 1 году, для всех целочисленных возрастов x справедливы соотношения

$$l_{[x]}=0{,}35\,l_x+0{,}65\,l_{x+1},\ {}_tq_{[x]}=t\,q_{[x]},\ t\in[0,\ 1],\ p_x=0{,}97.$$

1. Найти значение вероятности $p_{[x]}$.
2. Если $e_x=17{,}67$, то чему равно значение $e_{[x]}$?
3. При заданном $\overset{0}{e}_{x+1}=17{,}96$ вычислить $\overset{0}{e}_{[x]}$.

Решение.

1. Пусть $l_{[x]}=k\,l_x+(1-k)\,l_{x+1}$, где $k=0{,}35$. Обозначим дробь $l_x/l_{[x]}$ через u, тогда

$$u=\frac{l_x}{l_{[x]}}=\frac{l_x}{kl_x+(1-k)l_{x+1}}=\frac{1}{k+(1-k)(l_{x+1}/l_x)}=\frac{1}{k+(1-k)p_x}.$$

При заданных $k=0{,}35$, $p_x=0{,}97$ получим $u=1{,}0199$. Так как по условию $r=1$, то $l_{[x]+1}=l_{x+1}$ и, следовательно,

$$p_{[x]}=\frac{l_{[x]+1}}{l_{[x]}}=\frac{l_{x+1}}{kl_x+(1-k)l_{x+1}}=\frac{l_{x+1}}{l_x}u=up_x=$$

$$=1{,}0199\cdot 0{,}97=0{,}9893.$$

2. $$e_{[x]}=\sum_{k=0}^{\infty}{}_{k+1}p_{[x]}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{l_{[x]+k+1}}{l_{[x]}}=\frac{l_x}{l_{[x]}}e_x=\frac{l_x}{kl_x+(1-k)l_{x+1}}e_x=ue=$$

$$=1{,}0199\cdot 17{,}67=18{,}0214.$$

3. Поскольку $r=1$, то при $t\geq 1$

$${}_tp_{[x]}=\frac{l_{[x]+t}}{l_{[x]}}=\frac{l_{x+t}}{l_x}\frac{l_x}{l_{[x]}}=u\,{}_tp_x,$$

отсюда

$$\overset{0}{e}_{[x]}=\int_0^{\infty}{}_tp_{[x]}dt=\int_0^{\infty}\frac{l_{[x]+t}}{l_{[x]}}dt=\int_0^{1}\frac{l_{[x]+t}}{l_{[x]}}dt+\int_1^{\infty}\frac{l_{[x]+t}}{l_{[x]}}dt=$$

$$=\int_0^{1}{}_tp_{[x]}dt+u\int_1^{\infty}\frac{l_{[x]+t}}{l_x}dt.$$

Далее условие ${}_tq_{[x]}=t\,q_{[x]}$, $t\in[0,\ 1]$, переписывается в виде

$$1-\frac{l_{[x]+t}}{l_{[x]}}=t-t\frac{l_{x+1}}{l_{[x]}},\ t\in[0,\ 1],$$

откуда $l_{[x]+t}=t\,l_{x+1}+(1-t)\,l_{[x]}$.

Тогда первый интеграл равен

$$\int_0^1 {}_tp_{[x]}dt=\int_0^1 \frac{(1-t)l_{[x]}+tl_{x+1}}{l_{[x]}}dt=\int_0^1(1-t)dt+\frac{l_{x+1}}{l_{[x]}}\int_0^1 tdt=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{l_{x+1}}{l_{[x]}}=\frac{1}{2}(1+p_{[x]}).$$

При подстановке $t-1=s$ второй интеграл преобразуется к виду

$$\int_1^\infty \frac{l_{[x]+t}}{l_x}dt=\int_1^\infty {}_tp_xdt=\int_1^\infty \frac{l_{x+1+(t-1)}}{l_x}dt=\frac{l_{x+1}}{l_x}\int_0^\infty \frac{l_{x+1+s}}{l_{x+1}}ds=$$

$$=p_x\int_0^\infty {}_sp_{x+1}ds=p_x\overset{0}{e}_{x+1}.$$

Окончательно получаем

$$\overset{0}{e}_{[x]}=1/2(1+p_{[x]})+p_{[x]}\overset{0}{e}_{x+1}=0{,}5(1+0{,}9893)+0{,}9893\cdot 17{,}96=18{,}7623.$$

1.9. Другие функции дожития

Здесь рассматриваются еще четыре функции дожития, которые вводятся на основе рассмотренных ранее функций.

Произведение $l_x\overset{0}{e}_x$, равное суммарной ожидаемой продолжительности жизни для группы лиц возраста x численностью l_x человек, обозначается через T_x:

$$T_x=l_x\overset{0}{e}_x=l_x\int_0^\infty {}_tp_x\,dt=\int_0^\infty l_{x+t}\,dt.$$

Из (1.3.5) и данного равенства следует

$$\frac{d}{dx}T_x=\int_0^\infty \frac{d}{dx}l_{x+t}\,dt=-\int_0^\infty l_{x+t}\mu_{x+t}\,dt=\int_0^\infty \frac{d}{dt}l_{x+t}\,dt=-l_x. \tag{1.9.1}$$

Равенство (1.9.1) означает, что $\frac{d}{dx}T_x=\frac{T_x}{\overset{0}{e}_x}T_x$, откуда

$$\frac{d}{dx}\ln T_x=-\frac{1}{\overset{0}{e}_x}. \tag{1.9.2}$$

Соотношение (1.9.2) можно переписать в виде

$$\ln T_{x+1}-\ln T_x=-\int_0^t \frac{1}{\overset{0}{e}_{x+s}}ds.$$

Исходя из определения T_x, подстановкой $s=t-a$ легко вывести, что при $a>0$

$$\int_a^\infty l_{x+t}dt=\int_0^\infty l_{x+a+s}ds=T_{x+a}. \tag{1.9.3}$$

Функция T_x применяется при изучении возрастной структуры стационарных популяций. Популяция считается стационарной, если ее численность и возрастной состав неизменны во времени. Если в некоторой популяции известна скорость вхождения в нее A человек возраста x в год, то за время от a до b в популяцию войдет $A\cdot(b-a)$ человек указанного возраста. В каждый момент времени t число членов популяции, находящихся в возрастном промежутке от a до b, можно выразить в терминах функции T_x. Рассуждения здесь таковы. Если человек попадает в популяцию в возрасте x, то он останется в ней к возрасту s с вероятностью ${}_{s-x}p_x$. На временно́м интервале $(t-s+x,\ t-s+x+ds)$ в популяцию вошло Ads человек, из них $A\ {}_{s-x}p_x\,ds$ в момент t в ней останутся. Интегрируя по s от a до b, получим число членов популяции, находящихся в возрастном промежутке от a до b в момент времени t:

$$\int_a^b A\frac{l_s}{l_x}ds=\frac{A}{l_x}\int_a^b l_s ds=\frac{A}{l_x}\int_{a-x}^{b-x} l_{x+(s-x)}d(s-x)=\frac{A}{l_x}\int_{a-x}^{b-x} l_{x+y}dy=$$
$$=\frac{A}{l_x}\left(\int_{a-x}^{\infty} l_{x+y}dy-\int_{b-x}^{\infty} l_{x+y}dy\right).$$

Из равенства (1.9.3) следует

$$\int_a^b A\frac{l_s}{l_x}ds=\frac{A}{l_x}(T_a-T_b). \tag{1.9.4}$$

Последнее выражение зависит только от функции l_x и скорости вхождения в популяцию A, но не от момента времени t.

Пример. При условии $T_x=0{,}5(w-x)^2$, где w — предельный возраст, определить величину $\int_0^{0,5w}\frac{1}{\overset{0}{e}_t}dt$.

Решение. Поскольку согласно (1.9.2) $1/\overset{0}{e}_x=-T_x'/T_x$, то искомый интеграл равен $-\ln T_x\big|_0^{0,05w}=\ln 4$.

Пример. В страну ежегодно приезжают 2000 человек в возрасте 55 лет, и популяция таких людей стационарна. Требуется выяснить, исходя из табл. П.1, сколько человек в данной популяции имеют возраст от 75 до 80 лет.

Решение. В данном случае $A=2000$, $x=55$, $l_x=85\,916$, $a=75$, $b=80$, значение T_x вычисляется как $l_x\cdot\overset{0}{e}_x$, отсюда $T_a=l_a\cdot\overset{0}{e}_a=38\,914\cdot 7{,}05=$ $=274\,343{,}7$, аналогично $T_b=T_{80}=120\,398{,}3$. Теперь искомое отношение равно $2000(274\,343{,}7-120\,398{,}3)/85\,916=2802{,}697$. Округляя полученный результат, получаем ответ: 2803 человека среди мигрантов указанной популяции имеют возраст от 75 до 80 лет.

Пример. Первый корпус областного дома престарелых ежегодно принимает 400 человек в возрасте 70 лет, которые живут в этом корпусе до 80 лет, после чего переводятся во второй корпус. Популяция людей в каждом из корпусов стационарна. Ежегодно каждый постоялец первого корпуса получает поздравление с днем рождения в случае достижения им 71, 72, ..., 80 лет. В соответствии с табл. П.1 определить следующие значения.

1. Количество поздравлений с 80-летним юбилеем, получаемых за год жильцами первого корпуса.
2. Общее количество поздравлений за год.
3. Число людей, проживающих в первом корпусе.
4. Число людей, проживающих во втором корпусе.

Решение.

1. Количество поздравлений с 80-летним юбилеем составляет

$$400\cdot {}_{10}p_{70}=400\cdot l_{80}/l_{70}=400\cdot 22\,933/54\,806=167.$$

2. Из (1.9.4) следует, что общее число поздравлений за год равно

$$400(T_{71}-T_{80})/l_{70}=2449.$$

3. Количество постояльцев первого корпуса вычисляется исходя из (1.9.4):

$$400(T_{70}-T_{80})/l_{70}=2837.$$

4. Для определения числа жильцов второго корпуса количество 80-летних юбиляров умножим на $\overset{0}{e}_{80}=5{,}25$ и получим $167\cdot 5{,}25=879$.

Пример. Каждый год промышленная компания равномерно в течение года набирает 420 сотрудников в точном возрасте 18 лет и некоторое количество сотрудников в точном возрасте 25 лет. При этом общее количество сотрудников компании стабильно равно 25 000. По достижении 50 лет 35% сотрудников увольняется, а оставшиеся работают до 65 лет и выходят на пенсию. Иных причин ухода, кроме смерти, нет. Требуется, исходя из табл. П.1, ответить на следующие вопросы.

1. Чему равно количество сотрудников, набираемых в возрасте 25 лет?
2. Если каждому увольняющемуся в 50 лет компания выплачивает премию, равную 5000 руб., а каждому уходящему на пенсию — 10 000 руб., то чему равна суммарная годовая выплата?

Решение.

1. Количество сотрудников в возрасте от 18 до 50 лет, принятых на работу в 18 лет, обозначим через k_1. В силу (1.9.4)

$$k_1 = 420(T_{18} - T_{50}) / l_{18} = 420\,(l_{18}\overset{0}{e}_{18} - l_{50}\overset{0}{e}_{50}) / l_{18} = 13\,137{,}92.$$

Количество сотрудников в возрасте от 50 до 65 лет, принятых в 18 лет, обозначенное через k_0, составляет

$$0{,}65 \cdot 420\ \frac{l_{50}}{l_{18}}\,\frac{T_{50} - T_{65}}{l_{50}} = 3464{,}114.$$

Искомое количество сотрудников, набираемых в возрасте 25 лет, обозначим через k. Тогда количество сотрудников в возрасте от 25 до 50 лет, принятых в 25 лет, равно $k\,(T_{25} - T_{50}) / l_{25} = k\,c_2$, где через c_2 обозначен коэффициент $(T_{25} - T_{50}) / l_{25}$.

Количество сотрудников в возрасте от 50 до 65 лет, принятых в 25 лет, равно $0{,}65\,k\frac{l_{50}}{l_{25}}\frac{T_{50} - T_{65}}{l_{50}} = k\,c_3$, где коэффициент $c_2 = 0{,}65\frac{l_{50}}{l_{25}}\frac{T_{50} - T_{65}}{l_{50}}$. Величину k находим из уравнения $k_0 + k_1 + (c_2 + c_3)k = 25\,000$:

$$k = 255{,}91 \Rightarrow k = 256.$$

2. Сотрудники, которые увольняются в 50 лет, относятся к двум категориям, а именно нанятых в 18 и в 25 лет. Число людей из первой категории равно $420 \cdot 0{,}35\,l_{50} / l_{18}$, из второй — $256 \cdot 0{,}35\,l_{50} / l_{25}$. Суммируя эти два значения, получаем

$$420 \cdot 0{,}35\,l_{50} / l_{18} + 256 \cdot 0{,}35\,l_{50} / l_{25} = 221{,}475.$$

Группа сотрудников, которые выходят в 65 лет на пенсию, аналогично делится на две категории, а именно нанятых в 18 и в 25 лет. Суммарное число сотрудников по данным категориям равно

$$420 \cdot 0{,}65\,(l_{50} / l_{18})\,(l_{65} / l_{50}) + 256 \cdot 0{,}65\,(l_{50} / l_{25})\,(l_{65} / l_{50}) = 328{,}155.$$

Отсюда суммарные выплаты составляют

$$221{,}475 \cdot 5000 + 328{,}155 \cdot 10\,000 = 4\,388\,925 \text{ (руб.)}.$$

Следующая функция дожития, обозначаемая L_x, — ожидаемое число лет, прожитых на возрастном интервале $(x,\ x+1)$ членами наблюдаемой группы, первоначально состоящей из l_0 человек. Это ожидаемое число берется из сложения прожитых лет по двум категориям людей, а именно по людям, дожившим до возраста $x+1$, и по тем, кто умер на указанном возрастном интервале. Ожидаемое число лет по первой категории равно l_{x+1}, и каждый из этих людей на возрастном интервале $(x, x+1)$ прожил один год. Ожидаемое число прожитых лет на этом интервале теми, кто на данном интервале умер, равно $l_x\int_0^1 t\,dF_{T(x)}(t)$. Таким образом, $L_x = l_{x+1} + \int_0^1 t\,l_{x+t}\mu_{x+t}dt$.

Преобразуем выражение для L_x:

$$L_x = l_{x+1} + \int_0^1 t\,l_{x+t}\mu_{x+t}dt = l_{x+1} - \int_0^1 t\,d(l_{x+t}) =$$
$$= l_{x+1} - t\,l_{x+1}\Big|_0^1 + \int_0^1 l_{x+t}dt = \int_0^1 l_{x+t}dt.$$

Поскольку при всех неотрицательных k имеем
$\int_k^{k+1} l_{x+t}dt = \int_0^1 l_{x+k+s}ds = L_{x+k}$, то функция T_x равна

$$T_x = \sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1} l_{x+t}dt = \sum_{k=0}^{\infty} L_{x+k}.$$

Кроме того, путем замены $s = t+1$ величина T_{x+1} преобразуется к виду

$$T_{x+1} = \int_0^{\infty} l_{x+1+t}dt = \int_1^{\infty} l_{x+s}ds,$$

откуда получаем соотношение

$$T_x - T_{x+1} = L_x. \tag{1.9.5}$$

Для функции L_x справедливо соотношение

$$\frac{d}{dx}(L_x) = d_x. \tag{1.9.6}$$

Для его обоснования рассмотрим возраст x в определении L_x как параметр интеграла $\int_0^1 l_{x+1}dt$. Дифференцируя данный интеграл по указанному параметру, получим

$$\frac{d}{dx}(L_x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^1 l_{x+t}dt\right) = \int_0^1 \frac{d}{dx}(l_{x+t})dt =$$
$$= -\int_0^1 l_{x+t}\mu_{x+t}dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(l_{x+t})dt = l_{x+1} - l_x = d_x.$$

Получим выражения для L_x при равномерном распределении смертей и при постоянной интенсивности смертности внутри интервала $(x, x+1)$ для целого неотрицательного x.

Для гипотезы равномерного распределения смертей

$$L_x = \int_0^1 ((1-t)l_x + t\,l_{x+1})dt = 0{,}5l_x + 0{,}5l_{x+1},$$

а для гипотезы постоянной интенсивности смертности

$$L_x = \int_0^1 l_x e^{-\mu t} dt = l_x \frac{1-e^{-\mu t}}{\mu},$$

где $\mu = \ln(l_{63}/l_{64})$ — интенсивность смертности для интервала (x, $x+1$). Подставив это значение силы смертности в выражение для L_x, получим

$$L_x = d_x / \ln(l_{63}/l_{64}).$$

Пример. Между целочисленными возрастами интенсивность смерти считается постоянной. Требуется вычислить L_{24} согласно табл. П.1.

Решение. Сначала определим значение $\mu = \mu_{24+t}$, $t \in [0, 1]$. Оно равно $\ln(l_{25}/l_{24}) = \ln(95\,753/95\,851) = 0{,}001022943$. Далее из (1.9.6) следует

$$L_{24} = l_{24}\int_0^1 e^{-\mu t}dt = 95\,851(1 - e^{-0{,}001022943}/0{,}001022943) = 95\,801{,}99.$$

Пример. Для некоторой популяции функция дожития задана в виде $s(x) = (10-x)^2/100$, $0 \le x \le 10$. Если известно, что $l_1 = 80\,000$, то чему равно значение L_1?

Решение. $L_1 = l_1 \int_0^1 \frac{s(1+t)}{s(1)} dt = 80\,000 \int_0^1 \frac{s(1+t)}{s(1)} dt =$

$$= 80\,000\left(1 + \frac{t^2}{81}\Big|_0^1 - \frac{2t^2}{9}\Big|_0^1\right) = 80\,000 \cdot 0{,}893 = 71\,440{,}33.$$

Еще одна характеристика дожития, именно центральный уровень смертности, обозначаемый через m_x, определяется как отношение

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{\int_0^1 l_{x+t}\mu_{x+t}dt}{\int_0^1 l_{x+t}dt}.$$

В терминах величин m_x, L_x соотношение (1.9.6) переписывается в виде

$$\frac{d}{dx}(L_x) = -m_x L_x,$$

или, что то же самое,

$$\frac{d}{dx}(\ln L_x) = -m_x. \qquad (1.9.7)$$

Пример. Доказать, что $\mu_x > q_x$.

Решение. Из монотонного убывания величины l_x, а также по определению величин q_x, μ_x имеем неравенство

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} < \frac{d_x}{\int_0^1 l_{x+t}dt} = m_x,$$

что доказывает требуемое.

Пример. При равномерном распределении смертей между целочисленными возрастами x и $x+1$ выразить L_x через l_x и l_{x+1} и отношение m_x / q_x через q_x.

Решение. При равномерном распределении смертей $l_{x+1} = t\,l_{x+1} + (1-t)\,l_x$, отсюда, интегрируя данное выражение для l_{x+t} от нуля до единицы, получим

$$L_x = 0{,}5(l_x + l_{x+1}).$$

Поскольку $m_x = 2\dfrac{l_x - l_{x+1}}{l_x + l_{x+1}} = 2\dfrac{q_x}{1+p_x} = \dfrac{2q_x}{2-q_x}$, то $\dfrac{m_x}{q_x} = \dfrac{2}{2-q_x} = \dfrac{1}{1-0{,}5q_x}$.

Пример. Предположим, что характеристика m_x удовлетворяет условию $m_{40+t} = m_{40} - 0{,}001\,t$, $t \in (0, 4)$, при этом $L_{40} = 450$, $L_{44} = 420$. Требуется найти m_{40}.

Решение. Равенство (1.9.7) означает, что для всякого $a > 0$ при $x \geq 0$

$$\ln L_{x+a} - \ln L_x = -\int_0^a m_{x+t}dt,$$

откуда

$$L_{x+a} = L_x e^{-\int_0^a m_{x+t}dt}.$$

Подставляя в последнее равенство значения $x = 40$, $a = 4$, получаем

$$450e^{-\int_0^4 (m_{40} - 0{,}001t)dt} = 420;$$

преобразовывая в нем левую часть, приходим к уравнению относительно m_{40}: $450\,e^{-4m_{40} - 0{,}008} = 420$. Логарифмируя обе части уравнения, вычисляем

$$m_{40} = (0{,}008 - \ln(420/450))/4 = 0{,}019248.$$

Наряду со средним значением оставшегося срока жизни $\overset{0}{e}_x$ рассмотрим его локальный аналог — средний срок жизни на возрастном интервале $(x, x+1)$ для тех, кто умирает на этом интервале. Эта функция обозначается через $a(x)$ и по определению равна $E(T(x)|T(x)<1)$. Для данного условного среднего справедливо равенство

$$a(x)=\frac{\int_0^1 t\cdot {}_tp_x\mu_{x+t}\,dt}{\int_0^1 {}_tp_x\mu_{x+t}\,dt}=\frac{\int_0^1 t\cdot l_{x+t}\mu_{x+t}\,dt}{\int_0^1 l_{x+t}\mu_{x+t}\,dt}.$$

Интеграл в знаменателе равен $-\int_0^1 dl_{x+t}=d_x$, а интеграл в числителе —

$$-\int_0^1 t\,dl_{x+t}=-tl_{x+t}\big|_0^1+\int_0^1 l_{x+t}dt=L_x-l_{x+1},$$

следовательно, для характеристики $a(x)$ получено выражение

$$a(x)=(L_x-l_{x+1})\,/\,d_x.$$

Пример. При равномерном распределении смертей между целочисленными возрастами x и $x+1$ требуется вычислить $a(x)$.

Решение. При равномерном распределении смертей $L_x=0{,}5\,l_{x+1}+0{,}5\,l_x$, следовательно,

$$a(x)=\frac{0{,}5l_x+0{,}5l_{x+1}-l_{x+1}}{l_x-l_{x+1}}=0{,}5.$$

Пример. Внутри возрастного интервала (63, 64) интенсивность смерти считается постоянной. Исходя из значений функции l_x (см. табл. П.1), требуется найти средний срок жизни на возрастном интервале от 63 до 64 лет для тех, кто умер на этом интервале.

Решение. Искомый средний срок жизни равен

$$a(63)=\frac{L_{63}-l_{64}}{l_{63}-l_{64}}=\frac{\frac{l_{63}}{\mu}(1-e^{-\mu})}{d_{63}},$$

где $\mu_x=\ln(l_{63}\,/\,l_{64})=0{,}03096$. Подставляя необходимые значения из табл. П.1, получаем

$$a(63)=0{,}4974201.$$

Глава 2.

ЕДИНОВРЕМЕННЫЕ НЕТТО-ПРЕМИИ. АННУИТЕТЫ

Рассмотренные ранее характеристики дожития позволяют теперь для различных видов страхования жизни вычислять величину страховых премий в зависимости от условий страхования. Для этого будем всегда предполагать, что возраст застрахованного лица на момент заключения договора равен x. Если t — длина временнóго интервала от момента заключения договора до момента страховой выплаты, а b_t — величина этой выплаты, то современная, или текущая, стоимость выплаты на момент заключения договора равна $b_t \cdot v^t$. Здесь $v = 1/(1+i)$, где i — норма доходности, которая является результатом инвестиционных вложений страховой компании. Поскольку момент выплаты связан с дожитием застрахованного лица до определенного срока, то длина временнóго интервала от момента заключения договора до момента страховой выплаты является случайной величиной T. В частности, если срок выплаты ничем не ограничен, то случайная величина $T = T(x)$ — случайная длительность оставшегося срока жизни для (x). В этом случае текущая стоимость выплат является случайной величиной $b_T \cdot v^T$. Зависимость величины выплаты от времени определяется условиями договора. В общем случае если договор предполагает выплаты b_t, $t \in A$, для некоторого множества A из неотрицательной вещественной оси, то их современная, или текущая, стоимость определяется как случайная величина

$$Z = \begin{cases} b_T \cdot v^T, \ T \in A, \\ 0, \ T \notin A. \end{cases}$$

При этом ожидаемая современная стоимость по определению равна математическому ожиданию случайной величины Z:

$$EZ = \int_A b_t v^t dF_{T(x)}(t) = \int_A b_t v^t \cdot {}_t p_x \mu_{x+t} dt,$$

где EZ — величина текущих обязательств, т.е. обязательств страховщика по отношению к страхователю на момент заключения договора.

Если страхователь оплачивает услуги по полису в момент покупки полиса, то речь идет о единовременной, или разовой, премии по данному договору. При этом предполагается, что размер единовременной премии равен EZ, т.е. рассматривается нетто-премия, которая включает только обязательства по страховым выплатам. Реально премия включает в себя другие обязательства и риски, например расходы по ведению дела, риск досрочного расторжения договора и т.д. В таком случае при учете этих дополнительных издержек будем говорить о брутто-премии. Договоры страхования, как правило, предполагают выплату страхового возмещения в течение нескольких дней после урегулирования страхового случая, т.е. фактически на момент страхового случая, поэтому в качестве случайной величины современной стоимости выплат здесь выбрана непрерывная случайная величина Z. В то же время при некоторых предположениях вместо непрерывных случайных величин Z используется дискретная случайная величина, при этом предполагается, что в дискретном случае в качестве современной стоимости выплат вместо $b_T \cdot v^T$ рассматривается $b_{K+1} \cdot v^{K+1}$. Здесь вместо случайной величины остаточного срока жизни $T(x)$ берется $K(x)+1$, что предполагает выплаты по страховому случаю в конце года смерти. Использование дискретной случайной величины $K(x)$ и ее свойств предполагает вычисление величин нетто-премий на основе статистических таблиц, поэтому рассмотрение нетто-премий по различным видам страхования начнем с дискретного случая.

2.1. Основные виды страхования жизни

Первый вид страхования — бессрочное страхование жизни. В полисе по данному виду страхования предусматривается страховая выплата в конце года смерти независимо от того, когда данный страховой случай произошел. В случае постоянной страховой суммы можно считать ее величину равной единице, т.е. $b_{K+1}=1$, $k=0,1,2,\ldots$ При этом текущая стоимость страховых выплат определяется как случайная величина

$$Z=v^{K+1},\ K=K(x)=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

Ожидаемая современная стоимость выплат, равная единовременной нетто-премии, обозначается через A_x:

$$A_x=EZ=\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_{k|}q_x .$$

Величину A_x можно выразить через l_x, d_{x+k}:

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x} . \tag{2.1.1}$$

Дисперсия случайной величины $Z = E(Z)^2 - (A_x)^2$. При этом второй момент случайной величины Z, т.е. $E(Z)^2$, равен $\sum_{k=0}^{\infty} v^{2(k+1)} \cdot {}_{k|}q_x$ и обозначается через ${}^2A_x$. Смысл данного обозначения состоит в следующем. Величина дисконтирующего множителя v представляется в экспоненциальной форме через силу процента δ, которая определяется как $\ln(1+i)$. Тогда $v = e^{-\delta}$, а квадрат дисконтирующего множителя, т.е. v^2, равен $e^{-2\delta}$. Следовательно,

$$E(Z)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\delta(k+1)} \cdot {}_{k|}q_x .$$

Это означает, что второй момент Z выражается в виде первого момента с удвоенной силой процента. Таким образом, дисперсия текущей стоимости выплат представляется как $DZ = {}^2A_x - (A_x)^2$.

Рассмотрим теперь виды страхования на срок, в которых действие страхового договора распространяется на ограниченный временной интервал. Первый вид — страхование жизни на срок n лет. Выплаты производятся только в случае смерти застрахованного лица до наступления возраста $x+n$ лет. Здесь текущая стоимость выплат определяется как

$$Z = \begin{cases} v^{K(x)+1}, K(x) = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \\ 0, K(x) \geq n. \end{cases}$$

Единовременная нетто-премия обозначается в этом случае через $A^1_{x:\overline{n|}}$:

$$A^1_{x:\overline{n|}} = EZ = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_kp_x q_{x+k}.$$

Эту же величину можно выразить через l_x, d_x:

$$A^1_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x}. \tag{2.1.2}$$

Как и в случае бессрочного страхования жизни, второй момент случайной величины Z вычисляется по формуле первого момента с удвоенной силой процента:

$$E(Z^2) = {}^2A^1_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{2(k+1)} \cdot {}_{k|}q_x.$$

Отсюда

$$DZ = {}^2A^1_{x:\overline{n}|} - (A^1_{x:\overline{n}|})^2.$$

Следующий вид страхования — страхование дожития на срок n лет. Страховая выплата производится в случае дожития застрахованного лица до возраста $x+n$ лет. Случайная величина текущей стоимости выплат определяется как

$$Z = \begin{cases} 0, \ K(x) = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \\ v^n, \ K(x) \geq n. \end{cases}$$

Ожидаемая современная стоимость выплат, равная единовременной нетто-премии, обозначается $A^{\ \ 1}_{x:\overline{n}|}$ и составляет

$$A^{\ \ 1}_{x:\overline{n}|} = EZ = v^n \cdot {}_np_x. \qquad (2.1.3)$$

Так как

$$Z^2 = \begin{cases} 0, \ K(x) = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \\ v^{2n}, \ K(x) \geq n, \end{cases}$$

то дисперсия текущей стоимости выплат $DZ = EZ^2 - (A^{\ \ 1}_{x:\overline{n}|})^2$. Поскольку при этом

$$EZ^2 = {}^2A^{\ \ 1}_{x:\overline{n}|} = v^{2n} \cdot {}_np_x,$$

то выражение для этой дисперсии принимает вид

$$DZ = v^{2n} \cdot {}_np_x - (v^n \cdot {}_np_x)^2 = v^{2n} \cdot {}_np_x(1 - {}_np_x) = v^{2n} \cdot {}_np_x \cdot {}_nq_x.$$

Пример. По случаю 60-летнего юбилея отца сын заключил страховой договор, согласно которому отец получит 500 000 руб. в день своего 70-летия. Чему равна ожидаемая современная стоимость выплат по данному договору согласно табл. П.1? Расчетная норма доходности $i = 0{,}05$.

Решение. Искомая величина равна

$$500\,000\, A^{\ \ 1}_{x:\overline{n}|} = 500\,000 \cdot v^n \cdot {}_np_x = 500\,000 \cdot 0{,}613913 \cdot l_{70} / l_{60} =$$

$$= 306\,956{,}6\,(54\,806 / 78\,924) = 213\,155{,}2 \text{ (руб.)}.$$

Полученное значение говорит о том, что если не принимать во внимание неизбежно сопутствующие страхованию расходы, то страховая компания при назначении тарифа по такому договору может исходить из того, что цена полиса более чем в два раза меньше самой страховой выплаты.

Пример. (33) планирует взять ипотечный кредит на срок 3 года. Обязательным условием выдачи кредита является страхование жизни на срок погашения со страховой суммой, равной 3 000 000 руб., выплачиваемой в конце года смерти. Чему равна ожидаемая современная стоимость выплат по данному договору согласно табл. П.1? Найти среднеквадратичное отклонение случайной величины текущей стоимости выплат. Расчетная норма доходности $i = 0{,}05$.

Решение. При $x = 33$ искомая стоимость равна

$$3\,000\,000\, A^{1}_{33:\overline{3}|} = 3\,000\,000\left(v\frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} + v^2\frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x} + v^3\frac{l_{x+2} - l_{x+3}}{l_x}\right) =$$

$$= 3\,000\,000\,(1/(1{,}05 \cdot 94\,918))(94\,918 - 94\,789 +$$

$$+ (1/1{,}05)(94\,789 - 94\,652) + (1/1{,}05^2)(94\,652 - 94\,505)) =$$

$$= 11\,824{,}026 \text{ (руб.)}.$$

Таким образом, единовременная премия для данного полиса составляет менее 0,4% от страховой суммы. Случайная величина текущей стоимости выплат в этом случае определяется, как

$$Z = \begin{cases} 3\,000\,000\; v^{K(x)+1},\ K(x) = 0, 1, 2, \\ 0,\ K(x) \geq 3. \end{cases}$$

Ее второй момент

$$E(Z^2) = 9 \cdot 10^{12} \cdot {}^2A^{1}_{33:\overline{3}|} = 9 \cdot 10^{12}(1/(1{,}05^2 \cdot 94\,918))(94\,918 - 94\,789 +$$

$$+ (1/1{,}05^2)(94\,789 - 94\,652) + (1/1{,}05^4)(94\,652 - 94\,505)) =$$

$$= 32\,182\,476\,934.$$

Отсюда дисперсия этой случайной величины равна

$$D(Z) = E(Z^2) - (EZ)^2 = 32\,042\,669\,344,$$

следовательно, квадратичное отклонение случайной величины составляет $\sigma_Z = 179\,004{,}7$ (руб.).

Пример. Требуется определить среднеквадратичное отклонение случайной величины современной стоимости выплат по договору страхования дожития с единичной страховой суммой на срок 15 лет для (35) при $i = 0{,}06$, исходя из табл. П.1.

Решение. При $i = 0{,}06$ значение $v^{2n} = (1/1{,}06)^{30} = 0{,}17411$, согласно табл. П.1 вероятности ${}_np_x = l_{50}/l_{35} = 0{,}9517$, ${}_nq_x = 0{,}04825$, отсюда

$$DZ = 0{,}17411 \cdot 0{,}9517 \cdot 0{,}04825 = 0{,}007996,\ \sigma_Z = 0{,}089417765.$$

Смешанное страхование на срок n лет предполагает выплату по случаю смерти застрахованного лица в пределах временно́го интервала (0, 1), а также при дожитии его до возраста $x + n$ лет. Таким образом, страховая компания при заключении договора производит выплату по обоим рискам, именно смерти страхователя до оговоренного полисом срока, а также по случаю дожития до того же возраста, что объясняет название данного вида страхования. Если b_1 — величина страховой выплаты по случаю смерти, а b_2 — величина выплаты по дожитию, то текущая стоимость выплат здесь равна

$$Z=\begin{cases} b_1 v^{K(x)+1}, \; K(x)=0,1,2,\dots,n-1,\\ b_2 v^n, \; K(x)\ge n. \end{cases}$$

Из вида случайной величины Z следует представление

$$Z=b_1 Z_1+b_2 Z_2,$$

где Z_1, Z_2 — текущие стоимости выплат с единичным страховым возмещением для риска смерти и риска дожития соответственно: $EZ_1=A^1_{x:\overline{n}|}$, $EZ_2=A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$. При $b_1=b_2=1$ нетто-премия по смешанному страхованию на срок n лет обозначается через $A_{x:\overline{n}|}$:

$$EZ=A_{x:\overline{n}|}=\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\cdot {}_{k|}q_x+v^n\cdot {}_n p_x.$$

Отсроченное на m лет страхование жизни на срок n лет предполагает выплату по случаю смерти, только если смерть происходит на возрастном промежутке $[x, x+n)$. Текущая стоимость единичной страховой выплаты определяется как

$$Z=\begin{cases} v^{K(x)+1}, \; K(x)=m, m+1, m+2,\dots, m+n-1,\\ 0, \; K(x)<m \;\text{ или }\; K(x)\ge m+n. \end{cases}$$

Единовременная нетто-премия по данному виду страхования обозначается через ${}_{m|n}A_x$ и равна

$$EZ={}_{m|n}A_x=\sum_{k=m}^{m+n-1} v^{k+1}\cdot {}_{k|}q_x.$$

Если n бесконечно, то в таком случае говорится об отсроченном на m лет бессрочном страховании жизни. При этом ожидаемая современная стоимость единичной страховой выплаты обозначается ${}_{m|}A_x$:

$${}_{m|}A_x=\sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1}\cdot {}_{k|}q_x.$$

Последняя величина при преобразовании сводится к введенным ранее нетто-премиям:

$${}_{m|}A_x=\sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1}\cdot {}_{k|}q_x=\sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1}\frac{d_{x+k}}{l_x}=\sum_{k=m}^{\infty} v^{m+k-m+1}\frac{d_{x+m+k-m-1}}{l_{x+m}}\frac{l_{x+m}}{l_x}=$$

$$=v^m\cdot {}_m p_x\sum_{l=0}^{\infty} v^{l+1}\cdot {}_{l|}q_{x+m}=A_{x:\overline{m}|}^{\;\;1}\cdot A_{x+m}. \qquad (2.1.4)$$

В последнем выражении нетто-премия $A_{x:\overline{m}|}^{\ \ 1}$ играет роль вспомогательного множителя, который в таких случаях принято обозначать через ${}_mE_x$. Дисперсия случайной величины текущей стоимости выплат равна

$$DZ = {}_{m|}^{2}A_x - ({}_{m|}A_x)^2,$$

где через ${}_{m|}^{2}A_x$, как и ранее, обозначается ожидаемая современная стоимость выплат при удвоенной силе процента для отсроченного на m лет бессрочного страхования жизни.

Пример. Выразить ожидаемую современную стоимость выплат для отсроченного на m лет страхования жизни на срок n лет через ${}_mE_x$ и $A^1_{x+m:\overline{n}|}$.

Решение. Полагая при суммировании $k - m = l$, получаем

$$ {}_{m|n}A_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} v^{k+1}\frac{d_{x+k}}{l_x} = v^m\frac{l_{x+m}}{l_x}\sum_{k=m}^{m+n-1} v^{k-m+1}\frac{d_{x+m+k-m}}{l_{x+m}} =$$

$$= {}_mE_x\sum_{l=0}^{n-1} v^{l+1}\frac{d_{x+m+l}}{l_{x+m}} = {}_mE_x \cdot A^1_{x+m:\overline{n}|}.$$

Пример. Договор страхования жизни предусматривает единичную выплату в случае смерти страхователя после 5 лет по заключении договора. Выплаты по смерти в конце года смерти, возраст страхователя 52 года, $i = 0{,}04$. Используя табл. П.1, найти отношение ожидаемой современной стоимости выплат по данному договору к единовременной нетто-премии по бессрочному страхованию жизни для (57).

Решение. Из равенства ${}_{5|}A_{52} = {}_5E_{52} \cdot A_{57}$ получаем искомое отношение

$${}_{5|}A_{52} / A_{57} = {}_5E_{52} = v^5 \cdot {}_5p_{52} = (1/1{,}04)^5\, l_{57}/l_{52} = 0{,}773867914.$$

Пример. Договор страхования жизни на срок n лет предусматривает выплату 200 000 руб. в случае смерти застрахованного в первый год действия полиса и 100 000 руб. в случае его смерти в последующие $n - 1$ лет. Получить выражение для ожидаемой современной стоимости выплат по данному договору через стандартные нетто-премии по страхованию жизни.

Решение. Ожидаемая современная стоимость (ОСС) выплат равна

$$100\,000 \cdot vq_x + 100\,000 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_{k|}q_x = 100\,000 \cdot A^1_{x:\overline{1}|} + 100\,000 \cdot A^1_{x:\overline{n}|}.$$

Пример. Страховой договор предусматривает выплату 100 000 руб. в случае смерти (55) на пятом или шестом году действия полиса. Считая $i=0{,}06$, согласно табл. П.1 определить нетто-премию по данному договору.

Решение. Нетто-премия в данном случае составит

$$100\,000 \cdot {}_{4|2}A_{55} = 100\,000\,(v^5(d_{59}/l_{55}) + v^6(d_{60}/l_{55})) = 2928{,}315.$$

Пример. Договор смешанного страхования на срок n лет предусматривает выплату 50 000 руб. по случаю смерти и 100 000 руб. по случаю дожития до конца срока действия полиса. Выразить ожидаемую современную стоимость выплат по договору через стандартные обозначения для нетто-премий.

Решение. ОСС выплат равна

$$50\,000\,A^1_{x:\overline{n}|} + 100\,000\,A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = 50\,000\,A^1_{x:\overline{n}|} + 50\,000\,A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} + 50\,000A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} =$$
$$= 50\,000(A_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}).$$

Рассмотрим теперь виды страхования, в которых выплата по случаю смерти изменяется в зависимости от даты страхового случая. Пусть сначала выплата увеличивается с возрастанием страхового года. Именно пусть на $k+1$-м году действия полиса величина выплаты по смерти равна $k+1$, $k=0,1,2,\ldots$ Для бессрочного страхования жизни текущая стоимость выплат определяется как

$$Z = (K(x)+1)v^{K(x)+1}.$$

При этом единовременная нетто-премия обозначается $(IA)_x$ и равна

$$EZ = (IA)_x = \sum_{k=m}^{\infty} (k+1)v^{k+1} \cdot {}_{k|}q_x.$$

Для дальнейших целей более важно другое выражение для величины $(IA)_x$:

$$(IA)_x = \sum_{k=m}^{\infty} (k+1)v^{k+1}\frac{d_{x+k}}{l_x}. \qquad (2.1.5)$$

Кроме того, записывая множитель $(k+1)$ как $\sum_{j=0}^{k} 1$ и меняя порядок суммирования, получаем выражение для $(IA)_x$ через единовременные нетто-премии по отсроченному страхованию жизни:

$$(IA)_x = \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} 1 \cdot v^{k+1} \cdot {}_{k|}q_x = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty} 1 \cdot v^{k+1} \cdot {}_{k|}q_x = \sum_{j=0}^{\infty} {}_{j|}A_x.$$

Для страхования жизни на срок n лет с возрастающей страховой суммой текущая стоимость выплаты равна случайной величине

$$Z=\begin{cases}(K(x)+1)\ v^{K(x)+1}, \text{ если } K(x)=0,1,2,n-1,\\ 0, \text{ если } K(x)\geq n.\end{cases}$$

Договор по такому виду страхования предусматривает выплату $k+1$ в случае смерти на $k+1$-м году. Единовременная нетто-премия здесь, обозначаемая как $(IA)^1_{x:\overline{n}|}$, равна

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|}=\sum_{k=m}^{n-1}(k+1)v^{k+1}\cdot {}_{k|}q_x.$$

Для страхования жизни с возрастающей страховой выплатой в конце n-го года величина выплаты составляет n. Поэтому естественно определяется понятие смешанного страхования на срок n лет с возрастающей страховой выплатой. Здесь текущая стоимость выплаты равна случайной величине

$$Z=\begin{cases}(K(x)+1)\ v^{K(x)+1}, \text{ если } K(x)=0,1,2,n-1,\\ n, \text{ если } K(x)\geq n.\end{cases}$$

Таким образом, выплата $k+1$ производится в случае смерти страхователя на $k+1$-м году, а в случае дожития до конца срока действия полиса производится выплата n при дожитии страхователя до конца срока действия договора. Единовременная нетто-премия для такого вида смешанного страхования обозначается через $(IA)^1_{x:\overline{n}|}$:

$$(IA)_{x:\overline{n}|}=\sum_{k=m}^{n-1}(k+1)v^{k+1}\cdot {}_{k|}q_x+n\cdot A^1_{x:\overline{n}|}.$$

Рассмотрим случай убывающей по времени страховой выплаты. Именно для страхования жизни на срок n лет будем считать, что на $k+1$-м году жизни величина страховой выплаты по случаю смерти равна $(n-k)$, $k=0,1,2,\ldots$ Тогда текущая стоимость выплаты составит

$$Z=(n-K(x))\,v^{K(x)+1},\ k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Единовременная нетто-премия обозначается через $(DA)^1_{x:\overline{n}|}$ и равна

$$EZ=(DA)^1_{x:\overline{n}|}=\sum_{k=m}^{n-1}(n-k)v^{k+1}\cdot {}_{k|}q_x.$$

Как и для случая возрастающей страховой выплаты, единовременную нетто-премию удобно выразить через функции d_x и l_x:

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=m}^{n-1} (n-k) v^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x}. \tag{2.1.6}$$

Для тех договоров, связанных со страхованием жизни, в которых предусмотрена незамедлительная выплата по случаю смерти, т.е. для непрерывного случая текущей стоимости выплат, единовременная нетто-премия выражается с соответствующими множителями через случаи единовременных нетто-премий, рассмотренные ранее. Важно подчеркнуть, что незамедлительность выплаты по случаю смерти отражается в обозначении для единовременной нетто-премии проставлением черты над основным обозначением, т.е. над A. В частности, для бессрочного страхования жизни с незамедлительными выплатами текущая стоимость выплат равна случайной величине $\overline{Z} = v^{T(x)}$, а единовременная нетто-премия $E\overline{Z}$ обозначается через $\overline{A}_x$. В отличие от случая выплат в конце года смерти здесь имеется черта над A, как и во всех других случаях. Предполагая равномерность распределения смертей на каждом интервале $(x, x+1)$ при неотрицательных целых x, величину Z представим в виде $Z = v^{K(x)+S(x)}$, при этом дробная часть $T(x)$ — случайная величина $S(x)$ — имеет равномерное на $(0, 1)$ распределение и не зависит от $K(x)$. Отсюда следует независимость случайных величин $v^{K(x)+1}$ и $v^{K(x)-1}$. Математическое ожидание от произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий. В таком случае единовременная нетто-премия равна

$$\overline{A}_x = EZ = Ev^{K(x)+1+S(x)-1} = Ev^{K(x)+1} \cdot Ev^{S(x)-1} = A_x \cdot (E+i)^{1-S(x)}.$$

Кроме того, из равномерности распределения $1-S(x)$ следует

$$Ev^{1-S(x)} = \int_0^1 v^{-1+s} ds = \int_0^1 (1+i)^{1-s} ds = \int_0^1 e^{(1-s)\delta} ds = \frac{e^{\delta}-1}{\delta} = \frac{i}{\delta}.$$

Отсюда вытекает, что единовременная нетто-премия при незамедлительных выплатах по смерти получается из случая выплат в конце года смерти путем умножения на i/δ:

$$\overline{A}_x = Ev^{T(x)} = (i/\delta) A_x.$$

Пример. На сколько процентов изменится единовременная нетто-премия, если выплаты производить не в конце года, а незамедлительно при расчетных значениях нормы доходности $i = 0{,}4$, $0{,}5$ и $0{,}6$?

Решение. Искомое изменение равно $100\%(\overline{A}_x/A_x-1)=100\%(i/\delta-1)$. Это значение равно 1,99; 2,48 и 2,97% при $i=0{,}04$; 0,05 и 0,06 соответственно. Таким образом, с ростом нормы доходности увеличение единовременной нетто-премии становится все более ощутимым.

При страховании жизни на срок n лет текущая стоимость незамедлительных выплат единичного объема является случайной величиной

$$\overline{Z}=\begin{cases} v^{T(x)}, & T(x)<n,\\ 0, & T(x)\geq n.\end{cases}$$

Как и для бессрочного случая, величина $\overline{Z}$ представима в виде $\overline{Z}=Z\,v^{S(x)-1}$, где Z есть текущая стоимость единичной выплаты при страховании жизни на срок n лет с выплатой по смерти в конце страхового года. Следовательно,

$$\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}=E\overline{Z}=(i/\delta)\,A^{1}_{x:\overline{n}|}.$$

Таким образом, если случайная величина $\overline{Z}$, равная текущей стоимости выплат, определяемая величиной $T(x)$, допускает разложение в виде произведения $\overline{Z}=Z\,v^{S(x)-1}$, где Z зависит только от $K(x)$, то математическое ожидание $\overline{Z}$ представимо в виде произведения $E\overline{Z}=(i/\delta)\,EZ$.

Следует отметить, что часто применяется и другое представление математического ожидания случайной величины $\overline{Z}$. Именно при допущении, что смерти происходят в середине страхового года, вместо множителя i/δ берется множитель $(1+i)^{0,5}$. При малых значениях нормы доходности i эти два множителя мало различаются. Например, для $i=0{,}04$ имеем $i/\delta=1{,}019869$, а $(1+i)^{0,5}=1{,}019804$, относительная погрешность здесь порядка 10^{-5}.

Единовременная нетто-премия по срочному страхованию дожития не зависит от способа выплаты по смерти. Тем не менее единовременная нетто-премия по смешанному страхованию на срок n лет обозначается с чертой над A:

$$\overline{A}_{x:\overline{n}|}=\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}+A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}=(i/\delta)\,A^{1}_{x:\overline{n}|}+A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}.$$

Наряду с рассмотренными случаями выплат по смерти в конце года и незамедлительных выплат естественно получить выражения для единовременных нетто-премий в конце m-й части года. Такое возможно, если договор предусматривает выплаты по смерти в течение квартала или месяца после страхового случая. Кроме того, выражения для единовременных нетто-премий с выплатами по смерти в конце m-й части года играют важную вспомогательную роль. Такая выплата означает выплату в момент $K(x)+S_m$. Здесь случайная величина S_m принимает значения k/m, $k=1,2,3,\ldots,m$. Для каждого k значение $S_m=k/m$ в том и только в том случае, если $T(x)-K(x)\in[(k-1)/m,\,k/m)$. В общем случае

$$S_m=\frac{[(T(x)-K(x))m]+1}{m},$$

где квадратные скобки, как и ранее, означают целую часть. Для частного случая, когда смерти распределены равномерно на интервале $(x, x+1)$ для каждого целого значения x, S_m имеет распределение

$$P(S_m=k/m)=1/m,\ k=1,2,3,\ldots,m.$$

Здесь случайные величины $K(x)$ и S_m независимы. При этом для бессрочного страхования случайная величина текущей стоимости выплат имеет вид $Z^{(m)}=v^{K(x)+S_m}$, а единовременная нетто-премия обозначается как $A_x^{(m)}$:

$$A_x^{(m)}=EZ^{(m)}=Ev^{K(x)+S_m}=E(v^{K(x)+1}(1+i)^{1-S_m}).$$

В силу независимости $K(x)$ и S_m математическое ожидание здесь равно произведению математических ожиданий:

$$Ev^{K(x)+1}E(1+i)^{1-S_m}=A_x\sum_{k=1}^{m}(1+i)^{1-\frac{k}{m}}P\left(S_m=\frac{k}{m}\right)=A_x\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}(1+i)^{1-\frac{k}{m}}=$$

$$=A_x\frac{1}{m}\left(1+(1+i)^{\frac{1}{m}}+(1+i)^{\frac{2}{m}}+\ldots+(1+i)^{\frac{m-1}{m}}\right)=A_x\frac{i}{m((1+i)^{\frac{1}{m}}-1)}=A_x\frac{i}{i^{(m)}},$$

отсюда получаем

$$A_x^{(m)}=A_x\frac{i}{i^{(m)}}. \tag{2.1.7}$$

Здесь через $i^{(m)}$ обозначена номинальная m-кратная процентная ставка, соответствующая годовой норме доходности i. Данный термин легко объясняется равенством при определении $i^{(m)}$:

$$(1+i)^{\frac{1}{m}}=1+\frac{1}{m}i^{(m)}.$$

Это равенство утверждает, что увеличение годового вклада за m-ю часть года при процентной ставке i равно m-й части $i^{(m)}$. Значение $i^{(m)}$ меньше соответствующего значения i. В табл. 4 представлены значения $i^{(m)}$ для величин нормы доходности, здесь используемых.

Таблица 4

Величины $i^{(m)}$ для некоторых значений i, m

i \ m	2	4	6	12	24
0,04	0,039608	0,039414	0,039349	0,039285	0,039253
0,05	0,04939	0,049089	0,048989	0,048889	0,04884
0,06	0,059126	0,058695	0,058553	0,058411	0,05834

Для страхования жизни на срок n лет с выплатой страховой суммы в конце m-й части года случайная величина текущей стоимости выплат имеет вид

$$Z^{(m)} = \begin{cases} v^{K(x)+S_m}, \text{ если } K(x) < n, \\ 0, \text{ если } K(x) \geq n. \end{cases}$$

Как и для бессрочного страхования жизни, в силу независимости $K(x)$ и S_m ожидаемая современная стоимость выплат, обозначаемая через $A^{1\,(m)}_{x:\,\overline{n|}}$, равна

$$EZ^{(m)} = A^{1}_{x:\overline{n|}} \frac{i}{i^{(m)}}. \tag{2.1.8}$$

Для смешанного страхования на срок n лет с выплатой по случаю смерти в конце m-й части года текущая стоимость выплат есть случайная величина

$$Z^{(m)} = v^{\min(n,\, K(x)+S_m)},$$

математическое ожидание которой является единовременной нетто-премией $EZ^{(m)} = A^{1(m)}_{x:\overline{n|}}$ по данному виду страхования и равно

$$EZ^{(m)} = A^{(m)}_{x:\overline{n|}} = \frac{i}{i^{(m)}} A^{1}_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}}^{\;\;\,1}. \tag{2.1.9}$$

2.2. Выражение единовременных нетто-премий через коммутационные числа

Коммутационные числа служат для краткой записи актуарных выражений, в частности единовременных нетто-премий, а также для вычисления соответствующих значений путем использования таблиц коммутационных чисел. Многие актуарные выражения имеют стандартные записи через соответствующие коммутационные числа, что позволяет, не прибегая к сложным выкладкам, быстро получать нужные значения. Например, для бессрочного страхования жизни равенство (2.1.1) умножим на $v^x l_x$, тогда

$$v^x l_x A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{x+k+1} \cdot d_{x+k}.$$

Произведение $v^x l_x$ — первое и наиболее легко запоминающееся коммутационное число. Оно обозначается через D_x. Другое произведение, именно $v^{x+1} d_x$, — второе коммутационное число, обозначаемое C_x. Последнее равенство в терминах коммутационных чисел D_x, C_x примет вид

$$D_x A_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}.$$

Это выражение можно упростить еще раз, введя в рассмотрение третье коммутационное число — M_x, равное $\sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}$. Тогда для нетто-премии A_x получим простое выражение

$$A_x = M_x / D_x. \tag{2.2.1}$$

Выразим через коммутационные числа единовременную нетто-премию по страхованию жизни на n лет. Для этого равенство (2.1.2) умножим на D_x:

$$D_x A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k} - \sum_{k=n}^{\infty} C_{x+k} = M_x - \sum_{k=n}^{\infty} C_{x+n+(k-n)} = M_x - M_{x+n}.$$

Отсюда выражение для единовременной нетто-премии имеет вид

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}. \tag{2.2.2}$$

Наиболее просто через коммутационные числа получается выражение для единовременной нетто-премии по страхованию дожития. Действительно, после умножения равенства (2.1.3) на D_x будем иметь

$$A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \frac{D_{x+n}}{D_x}. \tag{2.2.3}$$

Для смешанного страхования на срок n лет равенства (2.2.2) и (2.2.3) дают представление

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

Для отсроченного на m лет страхования жизни из соотношения (2.1.4) следует

$$_{m|}A_x = {}_m E_x A_{x+m} = \frac{D_{x+m}}{D_x} \frac{M_{x+m}}{D_{x+m}} = \frac{M_{x+m}}{D_x}. \tag{2.2.4}$$

Для бессрочного страхования жизни с возрастающей страховой выплатой равенство (2.1.5) для единовременной нетто-премии путем умножения на D_x его левой и правой частей можно записать в виде

$$D_x(IA)_x = \sum_{k=m}^{\infty}(k+1)\,C_{x+k} = (C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + \ldots) +$$

$$+(C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + \ldots) + (C_{x+2} + C_{x+3} + C_{x+4} + \ldots) + \ldots =$$

$$= M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \ldots$$

Сумма ряда $\sum_{k=0}^{\infty} M_{x+k}$ является четвертым коммутационным числом R_x, через которое обозначается единовременная нетто-премия $(IA)_x$:

$$(IA)_x = R_x / D_x. \tag{2.2.5}$$

Для страхования жизни на срок n лет с возрастающей страховой суммой единовременная нетто-премия равна

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)v^{k+1}\frac{d_{x+k}}{l_x}.$$

Как и в случае бессрочного страхования, вводя переменную суммирования $l = k - n$, легко видеть, что

$$D_x(IA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)C_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)C_{x+k} - \sum_{k=n}^{\infty}(k+1)C_{x+k} =$$

$$= R_x - \sum_{k=n}^{\infty}(k-n+1+n)C_{x+n+k-n} = R_x - \sum_{k=n}^{\infty}(k-n+1)C_{x+n+k-n} - n\sum_{k=n}^{\infty}C_{x+n+k-n} =$$

$$= R_x - \sum_{l=0}^{\infty}(l+1)C_{x+n+l} - n\sum_{l=0}^{\infty}C_{x+n+l} = R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}.$$

Следовательно, единовременная нетто-премия

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} = (R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}) / D_x. \tag{2.2.6}$$

Отметим, что, наряду с выражением для $(IA)^1_{x:\overline{n}|}$, здесь получено соотношение для коммутационных чисел

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)C_{x+k} = R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}. \tag{2.2.7}$$

Единовременная нетто-премия по страхованию жизни на срок n лет с убывающей страховой суммой в соответствии с (2.1.6) удовлетворяет равенству

$$D_x\,(DA)^1_{x:\overline{n}|}=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)C_{x+k}=n\sum_{k=0}^{n-1}C_{x+k}-\sum_{k=0}^{n-1}kC_{x+k}=$$

$$=n(M_x-M_{x+n})-\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)C_{x+k}+\sum_{k=0}^{n-1}C_{x+k}=$$

$$=(n+1)\,(M_x-M_{x+n})-\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)C_{x+k}.$$

В соответствии с (2.2.7) последнее выражение равно

$$(n+1)\,(M_x-M_{x+n})-(R_x-R_{x+n}-nM_{x+n})=$$

$$=(n+1)M_x-M_{x+n}-(R_x-R_{x+n}).$$

Отсюда

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|}=((n+1)M_x-M_{x+n}-(R_x-R_{x+n}))\,/\,D_x.$$

Пример. Показать, что коммутационное число C_x представимо в виде

$$C_x=(1-d)\,D_x-D_{x+1}.$$

Решение. По определению $C_x=v^{x+1}d_x=v\,v^x(l_x-l_{x+1})=v\,D_x-D_{x+1}$. Поскольку $d=1-v$, из последнего равенства вытекает требуемое.

Пример. Выразить через коммутационые числа единовременную нетто-премию для отсроченного на m лет страхования жизни на срок n лет.

Решение. Поскольку единовременная нетто-премия равна ${}_{m|n}A_x={}_mE_x A^1_{x+m:\overline{n}|}$, при этом

$${}_mE_x=\frac{D_{x+m}}{D_x},\ A^1_{x+m:\overline{n}|}=\frac{M_{x+m}-M_{x+m+n}}{D_{x+m}},$$

то выражение единовременной нетто-премии принимает вид

$${}_{m|n}A_x=\frac{D_{x+m}}{D_x}\,\frac{M_{x+m}-M_{x+m+n}}{D_{x+m}}=\frac{M_{x+m}-M_{x+m+n}}{D_x}.$$

Пример. Согласно табл. П.3 и П.6 вычислить значения $A^1_{[51]+1:\overline{2}|}$, $(IA)^1_{[51]+1:\overline{2}|}$, $(DA)^1_{[51]+1:\overline{2}|}$.

Решение. $A^1_{[51]+1:\overline{2}|}=(C_{[51]+1}+C_{53})\,/\,D_{[51]+1}=(17{,}321323+$

$$+26{,}115030)\,/\,4199{,}7841=0{,}01034,$$

$$(IA)^1_{[51]+1:\overline{2}|} = (C_{[51]+1} + 2C_{53}) / D_{[51]+1} =$$

$$= (17{,}321323 + 2 \cdot 26{,}115030) / 4199{,}7841 = 0{,}0166,$$

$$(DA)^1_{[51]+1:\overline{2}|} = (2C_{[51]+1} + C_{53}) / D_{[51]+1} =$$

$$= (2 \cdot 17{,}321323 + 26{,}115030) / 4199{,}7841 = 0{,}0145.$$

Пример. Выразить сумму $(IA)^1_{x:\overline{n}|} + (DA)^1_{x:\overline{n}|}$ через $A^1_{x:\overline{n}|}$.

Решение. Складывая два равенства: $D_x(IA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)C_{x+k}$ и $D_x(DA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)C_{x+k}$, получим

$$D_x(IA)^1_{x:\overline{n}|} + D_x(DA)^1_{x:\overline{n}|} = (n+1)\sum_{k=0}^{n-1} C_{x+k} = (n+1)D_x A^1_{x:\overline{n}|}.$$

При делении последнего соотношения на D_x имеем

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} + (DA)^1_{x:\overline{n}|} = (n+1)A^1_{x:\overline{n}|}.$$

Пример. [57] заключает полис по страхованию дожития до 65 лет со страховой суммой 200 000 руб. Вычислить единовременную нетто-премию, исходя из селективной табл. П.2.

Решение. Согласно условию страхователь в возрасте 57 лет при заключении договора прошел отбор, срок действия которого составляет 2 года. Поэтому единовременная нетто-премия равна

$$200\,000\, A_{[57]:\overset{\ 1}{\overline{8}|}} = 200\,000\, D_{65} / D_{[57]} =$$

$$= 200\,000 \cdot 2144{,}1713 / 3296{,}3898 = 3943{,}71 \text{ (руб.)}.$$

Пример. [50] покупает полис страхования жизни на срок 10 лет со страховой суммой 100 000 руб. Чему равна единовременная нетто-премия согласно табл. П.2?

Решение. Искомая единовременная нетто-премия равна

$$100\,000\, A^1_{[50]:\overline{10}|} = 100\,000\,(M_{[50]} - M_{60}) / D_{[50]} =$$

$$= 100\,000\,(1752{,}6753 - 1477{,}0842) / 4581{,}3224 = 5125{,}72 \text{ (руб.)}.$$

Пример. Используя табл. П.2, требуется вычислить $(DA)^1_{53:\overline{7}|}$; $(IA)^1_{53:\overline{7}|}$; $A^1_{53:\overline{7}|}$.

Решение.

$$(DA)^1_{53:\overline{7}|} = (8M_{53} - M_{60} - (R_{53} - R_{60})) / D_{53} = 0{,}207666;$$

$$(IA)^1_{53:\overline{7}|} = (R_{53} - R_{60} - 7M_{60}) / D_{53} = 0{,}234345;$$

$$A^1_{53:\overline{7}|} = (M_{53} - M_{60}) / D_{53} = 0{,}055251.$$

Пример. Страхователь в возрасте 51 год заключает договор, согласно которому выплата по смерти производится в случае его смерти от 60 до 65 лет. Исходя из селективной табл. П.2, найти единовременную нетто-премию.

Решение. Искомая единовременная нетто-премия равна

$$_{9|5}A_{[51]} = (M_{60} - M_{65}) / D_{[51]} = 0{,}049835.$$

Пример. Страхователь точного возраста [54] года заключил договор по страхованию жизни на срок 10 лет. Страховая сумма уменьшается на 10% каждый год исходя из начального уровня 500 000 руб., так что в конце срока страхования ее значение равно 50 000 руб., выплаты по смерти в конце года. Чему равна согласно табл. П.2 и П.8 единовременная нетто-премия?

Решение. Единовременная нетто-премия при $b = 500\,000$, $n = 10$, $x = 54$ равна

$$(b + b/n)A^{1}_{[x]:\overline{n}|} - (b/n)(IA)^{1}_{[x]:\overline{n}|} = 550\,000\,(M_{[54]} - M_{64}) / D_{[54]} -$$
$$- 50\,000\,(R_{[54]} - R_{64} - 10\,M_{64}) / D_{[54]} = 21\,452{,}06 \text{ (руб.)}.$$

Для непосредственной записи единовременных нетто-премий в случаях, когда выплата по смерти производится в конце года смерти, существуют специальные коммутационные числа, которые позволяют вычислять премии без дополнительных предположений. Непрерывное коммутационное число $\overline{C}_x$ равно

$$\overline{C}_x = \int_0^1 D_{x+t}\mu_{x+t}dt.$$

Через $\overline{C}_x$ определяется коммутационное число $\overline{M}_x$:

$$\overline{M}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{C}_{x+k}.$$

Эти два коммутационных числа позволяют кратко записать некоторые стандартные нетто-премии. Например,

$$\overline{A}_x = \int_0^{\infty} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}\mu_{x+t}dt = \int_0^{\infty} \frac{D_{x+t}}{D_x}\mu_{x+t}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1} \frac{D_{x+t}}{D_x}\mu_{x+t}dt =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1} \frac{D_{x+k+t-k}}{D_x}\mu_{x+k+t-k}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1} \frac{D_{x+k+s}}{D_x}\mu_{x+k+s}ds = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\overline{C}_{x+k}}{D_x} = \frac{\overline{M}_x}{D_x}.$$

При суммировании по k от 0 до $n-1$ аналогично получается выражение

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}=\frac{\bar{M}_x-\bar{M}_{x+n}}{D_x}.$$

Для случая, когда на $k+1$-м году действия полиса выплата по случаю смерти равна $k+1$, при этом данная выплата производится незамедлительно, применяется третье непрерывное коммутационное число $\bar{R}_x$. Единовременная нетто-премия $(I\bar{A})_x$ тогда записывается в виде

$$(I\bar{A})_x=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{k}^{k+1}(k+1)\frac{D_{x+k+t-k}}{D_x}\mu_{x+k+t-k}dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\int_{0}^{1}\frac{D_{x+k+s}}{D_x}\mu_{x+k+s}ds=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{\bar{C}_{x+k}}{D_x}=\frac{\bar{R}_x}{D_x}.$$

Здесь коммутационное число $\bar{R}_x$ по определению равно $\sum_{k=0}^{\infty}\bar{M}_{x+k}$. Рассмотрим свойство коммутационных чисел $\bar{R}_x$. Именно нетрудно видеть, что

$$\bar{R}_x=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\bar{C}_{x+k}.$$

Кроме того, конечная сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\bar{C}_{x+k}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\bar{C}_{x+k}-\sum_{k=n}^{\infty}(k+1)\bar{C}_{x+k}=$$

$$=\bar{R}_x-\sum_{k=n}^{\infty}(k-n+1+n)\bar{C}_{x+n+k-n}=\bar{R}_x-\sum_{k=0}^{\infty}(l+1+n)\bar{C}_{x+n+l}=$$

$$=\bar{R}_x-\bar{R}_{x+n}-n\bar{M}_{x+n}.$$

Таким образом, для непрерывных коммутационных чисел получен аналог формулы (2.2.7):

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\bar{C}_{x+k}=\bar{R}_x-\bar{R}_{x+n}-n\bar{M}_{x+n}. \tag{2.2.8}$$

Пример. (52) заключает договор по страхованию жизни на срок 10 лет со страховой суммой 200 000 руб. Выплата по случаю смерти незамедлительная. Вычислить единовременную нетто-премию, используя табл. П.1 и П.2, и сравнить результаты.

Решение. Согласно табл. П.1

$$\bar{A}^{1}_{52:\overline{10}|}=\frac{\bar{M}_{52}-\bar{M}_{62}}{D_{52}}=24\,464{,}86\text{ (руб.)}.$$

В соответствии с табл. П.2. та же единовременная нетто-премия равна

$$\bar{A}^1_{52:\overline{10|}} = \frac{0{,}04}{\ln 1{,}04} \frac{M_{52} - M_{62}}{D_{52}} = 15\,895{,}27 \text{ (руб.)}.$$

Существенная разница в полученных значениях единовременной нетто-премии объясняется более высоким уровнем смертности в табл. П.1, чем в табл. П.2, для возрастного промежутка от 52 до 62 лет.

Пример. Договор, заключенный с (18) на срок 10 лет, предполагает незамедлительную выплату по случаю смерти. При этом объем выплаты на первом году действия полиса равен 50 000 руб. и в каждый последующий год увеличивается на 10 000 руб. Выплата по дожитию равна 200 000 руб. Требуется определить единовременную нетто-премию согласно табл. П.1.

Решение. Ожидаемая современная стоимость выплат по дожитию составляет

$$200\,000\, D_{28} / D_{18} = 133\,646{,}78 \text{ (руб.)},$$

а по случаю смерти —

$$40\,000\, \bar{A}^1_{x:\overline{n|}} + 10\,000\, (I\bar{A})^1_{x:\overline{n|}} =$$

$$= 40\,000 \frac{\bar{M}_{18} - \bar{M}_{28}}{D_{18}} + 10\,000 \sum_{k=0}^{9} \int_{k}^{k+1} (k+1) \frac{\bar{C}_{18+k}}{D_{18+k}} dt.$$

Из равенства (2.2.8) следует, что эта величина равна

$$40\,000 \frac{\bar{M}_{18} - \bar{M}_{28}}{D_{18}} + 10\,000(\bar{R}_{18} - \bar{R}_{28} - 10M_{28}) = 813{,}74 \text{ (руб.)}.$$

Теперь общая единовременная нетто-премия составляет

$$133\,646{,}78 + 813{,}74 = 134\,460{,}52 \text{ (руб.)}.$$

Пример. Договор страхования жизни, заключенный с заемщиком кредита возраста 45 лет на срок 5 лет, предполагает незамедлительную выплату по случаю смерти страховой суммы, величина которой для первого года равна 100 000 руб. и ежегодно уменьшается на 20 000 руб. Требуется определить единовременную нетто-премию согласно табл. П.1.

Решение. Искомая нетто-премия равна

$$100\,000\, \bar{A}^1_{45:\overline{5|}} - 20\,000 (I\bar{A})^1_{45:\overline{5|}} =$$

$$= 100\,000 \frac{\bar{M}_{45} - \bar{M}_{50}}{D_{45}} - 20\,000 \frac{\bar{R}_{45} - \bar{R}_{50} - 5\bar{M}_{50}}{D_{45}} = 843{,}02 \text{ (руб.)}.$$

2.3. Аннуитеты в страховании жизни

Аннуитетом называется серия регулярно поступающих платежей с заранее оговоренным сроком действия. Платежи, которые поступают от страхователя к страховщику, принято называть взносами, а идущие в адрес страхователя — аннуитетами. Например, договор страхования может предполагать выплату пенсии в течение определенного периода времени и начиная с некоторого возраста. Следовательно, пенсия является не чем иным, как отсроченным на определенный срок аннуитетом. С другой стороны, единовременная премия может быть значительной суммой, заплатить которую сразу затруднительно, поэтому страхователь может выплачивать взносы, причем их суммарная стоимость должна быть эквивалентна единовременной премии. Этим обстоятельством объясняется термин «единовременная нетто-премия по аннуитету», которым мы будем пользоваться. Аннуитеты различаются по частоте поступающих платежей, по сроку действия, по объему каждой выплаты.

Рассмотрим сначала аннуитеты, выплачиваемые ежегодно. Они разделяются на два вида — авансовые премии, или взносы, выплачиваемые в начале текущего года, и задолженные, выплачиваемые в конце текущего года. Первые часто называют аннуитетами-пренумерандо, вторые — постнумерандо. Как правило, в роли авансовых аннуитетов выступают взносы страхователя, регулярно перечисляемые на счет страховой компании, а в роли задолженных аннуитетов — платежи, производимые на имя страхователя. Рассмотрим аннуитет-пренумерандо, выплачиваемый в течение n лет, т.е. в моменты $0, 1, \ldots, n-1$. Величину аннуитета будем считать равной единице. В таком случае его текущая стоимость обозначается через $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ и составляет

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d};$$

здесь и далее разность $1-v$ — годовой дисконт, соответствующий годовой норме доходности i. Теперь предположим, что тот же аннуитет выплачивается уже в течение всей жизни страхователя, т.е. в течение $K = K(x)$ лет в моменты $0, 1, \ldots, K(x)$. Тогда его текущая стоимость является случайной величиной:

$$\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} = \frac{1-v^{K(x)+1}}{d}.$$

Единовременная нетто-премия по такому аннуитету, равная его ожидаемой современной стоимости, определяется как математическое ожидание его текущей стоимости и обозначается как $\ddot{a}_x$:

$$\ddot{a}_x = E(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1|}}) = \frac{1 - E(v^{K(x)+1})}{d} = \frac{1 - A_x}{d}.$$

Здесь и далее мы предполагаем, что это математическое ожидание конечно. Отсюда следует соотношение, позволяющее выражать единовременную нетто-премию по бессрочному аннуитету-пренумерандо через единовременную нетто-премию по бессрочному страхованию жизни:

$$1 = A_x + d\ddot{a}_x. \qquad (2.3.1)$$

По определению математического ожидания

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1|}} \cdot {}_{k|}q_x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \ddot{a}_{\overline{k+1|}} \cdot {}_{k|}q_x.$$

По предположению последний предел конечен в силу сходимости ряда $\ddot{a}_x$. Этот ряд преобразуется следующим образом. Сначала величина ${}_{k|}q_x$ представляется в виде разности ${}_kp_x - {}_{k+1}p_x$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, при этом $\ddot{a}_{\overline{k+1|}} - \ddot{a}_{\overline{k|}} = v^k$. Отсюда

$$\sum_{k=0}^{n} \ddot{a}_{\overline{k+1|}} \cdot {}_{k|}q_x = \ddot{a}_{\overline{1|}} ({}_0p_x - {}_1p_x) + \ddot{a}_{\overline{2|}} ({}_1p_x - {}_2p_x) + \ldots + \ddot{a}_{\overline{n|}} ({}_np_x - {}_{n+1}p_x) =$$

$$= \ddot{a}_{\overline{1|}}\, {}_0p_x + (\ddot{a}_{\overline{2|}} - \ddot{a}_{\overline{1|}}) \cdot {}_1p_x + \ldots + (\ddot{a}_{\overline{n|}} - \ddot{a}_{\overline{n-1|}}) \cdot {}_{n-1}p_x - \ddot{a}_{\overline{n|}} \cdot {}_{n+1}p_x =$$

$$= 1 + v \cdot {}_1p_x + v^2 \cdot {}_2p_x + \ldots + \cdot v^n \cdot {}_np_x - \ddot{a}_{\overline{n|}} \cdot {}_{n+1}p_x.$$

Заметим, что

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} \cdot {}_{n+1}p_x = \ddot{a}_{\overline{n|}} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} {}_{k|}q_x \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k|}} \cdot {}_{k|}q_x,$$

тогда вследствие сходимости ряда $\sum_{k=0}^{n} \ddot{a}_{\overline{k|}} \cdot {}_{k|}q_x$ его остаток, равный $\sum_{k=n+1}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k|}} \cdot {}_{k|}q_x$, стремится к нулю при стремлении n к бесконечности. Следовательно,

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{n} v^k \cdot {}_kp_x.$$

Дисперсия текущей стоимости аннуитета вычисляется через выражение для дисперсии частного $(1 - v^{K(x)+1})/d$. Эта дисперсия равна

$$D((1 - v^{K(x)+1})/d) = D\,(1 - v^{K(x)+1})/d^2 = ({}^2A_x - (A_x)^2)/d^2.$$

Для аннуитета-постнумерандо, выплачиваемого в течение n лет, т.е. в моменты времени $1, 2, \ldots, n$, его текущая стоимость, обозначаемая через $a_{\overline{n}|}$, равна $v + v^2 + \ldots + v^n$. Отсюда следует равенство

$$a_{\overline{n}|} = v\ddot{a}_{\overline{n}|} = (v(1 - v^n)) / d.$$

Пусть теперь аннуитет-постнумерандо выплачивается пожизненно, т.е. (x) производит единичные платежи в моменты $1, 2, \ldots, K(x)$, тогда текущая стоимость пожизненного аннуитета-постнумерандо составляет

$$a_{\overline{K(x)}|} = v + v^2 + \ldots + v^{K(x)} = \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} - 1.$$

Отсюда единовременная нетто-премия по такому аннуитету, обозначаемая как a_x, равна $\ddot{a}_x - 1$. Аналог равенства (2.3.1) для аннуитета-постнумерандо отсюда такой:

$$v = A_x + d\,a_x, \tag{2.3.2}$$

где

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_x.$$

Для срочных взносов единичной величины, т.е. таких взносов единичной величины, которые уплачиваются страхователем в течение n лет, их текущая стоимость определяется как случайная величина

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n}|}, \text{ если } K(x) \geq n, \\ \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}, \text{ если } K(x) < n. \end{cases}$$

Единовременная нетто-премия по этому аннуитету, равная EY, обозначается через $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$. Если учесть, что таким образом определенная случайная величина Y представима в виде $Y = (1 - Z) / d$, где случайная величина $Z = v^{\min(n,\, K(x)+1)}$ — текущая стоимость выплат для смешанного страхования на срок n лет, то нетрудно видеть, что единовременная нетто-премия данного аннуитета равна

$$EY = (1 - EZ) / d = (1 - A_{x:\overline{n}|}) / d.$$

Указанная единовременная нетто-премия обозначается через $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ и вследствие последнего равенства удовлетворяет соотношению

$$A_{x:\overline{n}|} + d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1. \tag{2.3.3}$$

Кроме того, дисперсия Y равна $DZ / d^2 = ({}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2) / d^2$. Рассмотрим представление $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ в виде конечной суммы через функции дожития. По определению математического ожидания и вследствие равенства ${}_n p_x = \sum_{k=n}^{\infty} {}_{k|}q_x$

$$EY = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \cdot {}_{k|}q_x + \ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_n p_x =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \cdot {}_{k|}q_x - \sum_{k=n}^{\infty} (\ddot{a}_{\overline{k+1}|} - \ddot{a}_{\overline{n}|}) \cdot {}_{k|}q_x =$$

$$= \ddot{a}_x - \sum_{k=n}^{\infty} (v^n + v^{n+1} + \ldots + v^k) \cdot {}_{k|}q_x =$$

$$= \ddot{a}_x - v^n l_{x+n} / l_x \sum_{k=n}^{\infty} (1 + v + v^2 + \ldots + v^{k-n})\, d_{x+n+k-n} / l_{x+n} =$$

$$= \ddot{a}_x - {}_nE_x \sum_{l=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{l+1}|} \cdot {}_{l|}q_{x+n} = \ddot{a}_x - {}_nE_x \ddot{a}_{x+n}.$$

Отсюда следует, что

$$\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x \ddot{a}_{x+n}.$$

Кроме того,

$$\ddot{a}_x - {}_nE_x \ddot{a}_{x+n} = \ddot{a}_x - v^n \cdot {}_n p_x \sum_{k=0}^{\infty} (l_{x+n+k} / l_{x+n})\, v^k = \ddot{a}_x - \sum_{k=0}^{\infty} (l_{x+n+k} / l_x)\, v^{k+n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (l_{x+k} / l_x)\, v^k - \sum_{k=n}^{\infty} (l_{x+k} / l_x)\, v^k = \sum_{k=0}^{n-1} (l_{x+k} / l_x)\, v^k,$$

откуда вытекает соотношение

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_k p_x. \qquad (2.3.4)$$

Для получения аналогичного выражения для аннуитета-постнумерандо, выплачиваемого в течение n лет, сначала определим его текущую стоимость как случайную величину

$$Y = \begin{cases} a_{\overline{K}|}, & K = K(x) < n, \\ a_{\overline{n}|}, & K(x) \geq n. \end{cases}$$

Единовременная нетто-премия по данному аннуитету равна

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n-1} a_{\overline{k}|} \cdot {}_{k|}q_x + a_{\overline{n}|} \cdot {}_n p_x = \sum_{k=1}^{n-1} a_{\overline{k}|} \cdot {}_{k|}q_x - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{\overline{k}|} - a_{\overline{n}|}) \cdot {}_{k|}q_x =$$

$$= a_x - \sum_{k=n+1}^{\infty} (v^{n+1} + v^{n+2} + \ldots v^k)\, d_{x+k} / l_x =$$

$$=a_x-v^n l_{x+n}/l_x \sum_{k=n+1}^{\infty}(v+v^2+\dots v^{k-n})\, d_{x+k}/l_{x+n}=$$

$$=a_x-{}_nE_x\sum_{l=1}^{\infty}(v+v^2+\dots v^l)\, d_{x+n+l}/l_{x+n}=$$

$$=a_x-{}_nE_x\sum_{l=1}^{\infty}a_{\overline{l}|}\cdot{}_{l|}q_{x+n}=a_x-{}_nE_x\cdot a_{x+n}.$$

Последнее равенство означает, что единовременные нетто-премии по срочному и бессрочному аннуитетам-постнумерандо удовлетворяют соотношению

$$a_x=a_{x:\overline{n}|}+{}_nE_x\cdot a_{x+n}.$$

Кроме того,

$$a_{x:\overline{n}|}=\sum_{k=1}^{\infty}v^k\cdot{}_kp_x-v^n l_{x+n}/l_x\sum_{k=1}^{\infty}v^k l_{x+n+k}/l_{x+n}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}v^k\cdot{}_kp_x-\sum_{k=1}^{\infty}v^{k+n}l_{x+n+k}/l_x=\sum_{k=1}^{\infty}v^k\cdot{}_kp_x-\sum_{k=n+1}^{\infty}v^k\cdot{}_kp_x,$$

откуда следует, что единовременная нетто-премия составляет

$$a_{x:\overline{n}|}=\sum_{k=1}^{n}v^k\cdot{}_kp_x. \tag{2.3.5}$$

Отсюда и из равенства (2.3.4) вытекает

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-a_{x:\overline{n}|}=1-{}_nE_x. \tag{2.3.6}$$

Пример. При заданных значениях $a_{x:\overline{n}|}=14{,}2$, $A^1_{x:\overline{n}|}=0{,}046$, $A_{x:\overline{n}|}=0{,}35$ требуется определить расчетную норму доходности i.

Решение. Сначала найдем значение ${}_nE_x=0{,}35-0{,}046=0{,}304$. Теперь из равенства (2.3.3) получаем

$$d=(1-A_{x:\overline{n}|})/\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=(1-A_{x:\overline{n}|})/(1+a_{x:\overline{n}|}-{}_nE_x)=0{,}043636.$$

Равенство (2.3.4) можно представить в виде

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=1+\sum_{k=1}^{n-1}v^k\cdot{}_kp_x=1+v\,l_{x+1}/l_x\sum_{k=1}^{n-1}v^{k-1}l_{x+1+k-1}/l_{x+1}=$$

$$=1+v\,p_x\sum_{l=0}^{n-2}v^l\cdot{}_lp_{x+1}=1+v\,p_x\cdot\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|},$$

откуда следует рекуррентная формула для единовременной нетто-премии по авансовому аннуитету на срок n лет:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + v p_x \cdot \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}.$$

Для случая аннуитета-пренумерандо справедлива рекуррентная формула

$$a_{x:\overline{n}|} = v p_x (1 + a_{x+1:\overline{n-1}|}),$$

вывод которой аналогичен предыдущему случаю:

$$a_{x:\overline{n}|} = v p_x + \sum_{k=2}^{n} v^k \cdot {}_k p_x = v p_x + v p_x \sum_{k=2}^{n} v^{k-1} l_{x+1+k-1} / l_{x+1} =$$

$$= v p_x + v p_x \sum_{l=1}^{n-1} v^l l_{x+1+l} / l_{x+1} = v p_x + v p_x a_{x+1:\overline{n-1}|}.$$

Для вывода формул расчета единовременных нетто-премий по отсроченным на m лет аннуитетам будем предполагать, что возраст страхователя равен x, начиная с возраста $x+m$ он раз в год выплачивает (или, наоборот, получает) взносы единичной величины в течение n лет. Единовременная нетто-премия по этим взносам равна

$${}_{m|n}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} v^k \cdot {}_k p_x.$$

Вывод данного соотношения получается просто, если представить текущую стоимость, т.е. случайную величину Y, этих взносов как разность $Y_1 - Y_2$, где случайные величины Y_1 и Y_2 являются соответственно текущими стоимостями срочных взносов, выплачиваемых в течение $m+n$ и m лет соответственно. Кроме того, из равенства $Y_1 = Y + Y_2$ вытекает соотношение

$$\ddot{a}_{x:\overline{m+n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{m}|} + {}_{m|n}\ddot{a}_x.$$

При этом величину ${}_{m|n}\ddot{a}_x$ удобно представить в виде

$${}_{m|n}\ddot{a}_x = v^m l_{x+m} / l_x \sum_{k=m}^{m+n-1} v^{k-m} l_{x+m+k-m} / l_{x+m} =$$

$$= {}_m E_x \sum_{l=0}^{n-1} v^l \cdot {}_l p_{x+m} = {}_m E_x \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n}|}.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\ddot{a}_{x:\overline{m+n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{m}|} + {}_n E_x \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n}|}.$$

Аналогично обозначениям для единовременных нетто-премий страховых выплат, в случае когда $n = \infty$, нетто-премия по отсроченному на m лет аннуитету выражается через ${}_{m|}\ddot{a}$ и равна

$$ {}_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_x = {}_m E_x \cdot \ddot{a}_{x+m}. \tag{2.3.7} $$

Пример. Доказать, что ${}_{m|}\ddot{a}_x + {}_{m|}A_x = {}_m E_x$.

Решение. Складывая равенства

$$ {}_{m|}A_x = {}_m E_x \cdot A_{x+m} \quad \text{и} \quad d \cdot {}_{m|}\ddot{a}_x = d \cdot {}_m E_x \cdot \ddot{a}_{x+m}, $$

получаем

$$ {}_{m|}\ddot{a}_x + {}_{m|}A_x = {}_m E_x (A_{x+m} + d\,\ddot{a}_{x+m}) = {}_m E_x. $$

Пример. Доказать равенство $A_{x:\overline{n}|} = d \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} q_{x+k} \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$.

Решение. $A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_{k|}q_x = v\, q_x + v\, p_x A_{x+1:\overline{n-1}|} =$

$$ = v\, q_x + v(1-q_x) A_{x+1:\overline{n-1}|} = v\, q_x (1 - A_{x+1:\overline{n-1}|}) + v\, A_{x+1:\overline{n-1}|} = $$

$$ = d\, v\, q_x a_{x+1:\overline{n-1}|} + v A_{x+1:\overline{n-1}|} = $$

$$ = d\, v\, q_x a_{x+1:\overline{n-1}|} + v(d\, v\, q_{x+1} a_{x+2:\overline{n-2}|} + v\, A_{x+2:\overline{n-2}|}) = $$

$$ = d(v\, q_x a_{x+1:\overline{n-1}|} + v^2 q_{x+1} a_{x+2:\overline{n-2}|}) + v^2 A_{x+2:\overline{n-2}|} = \ldots = $$

$$ = d \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} q_{x+k} \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}, $$

поскольку величина $A_{x+n:\overline{0}|}$ по определению равна нулю.

Пример. Страховой договор предполагает в начале каждого года выплату пенсии в размере 60 000 руб. начиная с 60 лет. Определить единовременную нетто-премию по этой пенсии для [54] в соответствии с табл. П.2.

Решение. Единовременная нетто-премия по единичной годовой выплате из (2.3.7) равна

$$ {}_{6|}\ddot{a}_{[44]} = {}_6 E_{[44]} \cdot \ddot{a}_{60} = D_{60} / D_{[54]} (1 - A_{60}) / d = $$

$$ = 0{,}748\,257 (1 - M_{60} / D_{60}) / (0{,}04 / 1{,}04) = $$

$$ = 0{,}748257 \cdot 9{,}391561 = 7{,}027301, $$

следовательно, при указанных данных искомая премия равна

$$ 60\,000 \cdot 7{,}027301 = 421\,638{,}1 \text{ (руб.)}. $$

Пример. Страховой полис предполагает выплату [50] ежегодного аннуитета в конце каждого года в течение 10 лет. Годовой размер аннуитета составляет 40 000 руб. Чему равна единовременная нетто-премия по данному аннуитету согласно табл. П.2?

Решение. Единовременная нетто-премия по годовой выплате единичной величины равна $\ddot{a}_{[50]:\overline{10}|}$. В соответствии с (2.3.6) эта величина представима в виде

$$\ddot{a}_{[50]:\overline{10}|} - 1 + {}_{10}E_{[50]} = (1 - A_{[50]:\overline{10}|}) / d - 1 + {}_{10}E_{[50]}.$$

Согласно табл. П.2 последнее выражение равно

$$(1 - (M_{[50]} - M_{60} + D_{60}) / D_{[50]}) / (0{,}04 / 1{,}04) - 1 + D_{60} / D_{[50]} = 9{,}341152.$$

Пример. При заданных значениях $a_x = 13{,}4$, $a_{x+1} = 13{,}28$, $A_x = 0{,}3$ требуется найти величину A_{x+1}.

Решение. Из равенства $a_x = vp_x(1 + a_{x+1})$ следует

$$vp_x = a_x / (1 + a_{x+1}) = 13{,}4 / 14{,}28 = 0{,}938375.$$

Из равенства (2.3.3) получаем

$$d = 1 - v = (1 - A_x) / (1 + a_x) = (1 - 0{,}3) / (1 + 13{,}4) = 0{,}0486.$$

Отсюда $v = (a_x + A_x) / (1 + a_x) = 0{,}9514$, следовательно, $p_x = 0{,}9863$, $q_x = 0{,}013678$. Поскольку $A_x = vq_x + vp_x A_{x+1}$, то теперь

$$A_{x+1} = (A_x - vq_x) / vp_x = 0{,}305833.$$

Рассмотрим случай аннуитета переменной величины. Пусть в начале первого года величина аннуитета равна 1, в начале второго года — 2 и т.д. Если такой взнос выплачивается строго (т.е. без учета возможности смерти страхователя) n лет, то его современная стоимость обозначается как $(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$ и равна

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \cdot v^k.$$

Эта величина называется текущей стоимостью n-годичного гарантированного аннуитета-пренумерандо.

Для бессрочного аннуитета, который выплачивается, пока (x) жив, его современная, или текущая, стоимость равна, таким образом, $(I\ddot{a})_{\overline{K(x)+1}|}$. Следовательно, единовременная нетто-премия обозначается как $(I\ddot{a})_x$ и равна математическому ожиданию случайной величины $(I\ddot{a})_{\overline{K(x)+1}|}$, т.е.

$$(I\ddot{a})_x = E(I\ddot{a})_{\overline{K(x)+1}|} = \sum_{k=0}^{\infty} (I\ddot{a})_{\overline{k+1}|} \cdot {}_{k|}q_x.$$

Для получения более удобного представления $(I\ddot{a})_x$ последнее выражение для математического ожидания преобразуется с помощью замены порядка суммирования:

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{\infty}(I\ddot{a})_{\overline{k+1}|}\cdot {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}(j+1)\,v^j\,{}_{k|}q_x = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\,v^j\sum_{k=j}^{\infty}{}_{k|}q_x.$$

Поскольку вероятность ${}_jp_x$ равна $\sum\limits_{k=j}^{\infty}{}_{k|}q_x$, то отсюда следует, что

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\,v^j\,{}_jp_x.$$

Для получения соотношения, связывающего единовременную нетто-премию по аннуитету возрастающей величины и единовременную нетто-премию по страховой выплате переменной величины, полезно равенство

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = (\ddot{a}_{\overline{n}|} - n\cdot v^n)\,/\,d.$$

Обоснование последнего соотношения очень просто:

$$d(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = (1-v)\,(1+2v+\ldots+nv^{n-1}) =$$
$$= 1+2v+3v^2+\ldots+nv^{n-1}-v-2v^2-\ldots-nv^n =$$
$$= 1+v+v^2+\ldots+v^{n-1}-nv^n = \ddot{a}_{\overline{n}|}-nv^n.$$

Отсюда

$$(I\ddot{a})_{\overline{K(x)+1}|} = (\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} - (K(x)+1)\,v^{K(x)+1})\,/\,d.$$

Взяв математическое ожидание от обеих частей последнего равенства, получим

$$d\,(I\ddot{a})_x + (IA)_x = \ddot{a}_x. \tag{2.3.8}$$

Кроме того, для текущей стоимости n-годичного аннуитета-пренумерандо возрастающей величины очевидно справедливо соотношение

$$(I\ddot{a})_{\overline{Z}|} = (\ddot{a}_{\overline{Z}|} - Z\,v^Z)\,/\,d,$$

где $Z = \min(K(x)+1,\,n)$. Отсюда получаем, что при всех натуральных n для единовременной нетто-премии по n-годичному аннуитету-пренумерандо возрастающей величины, которая обозначается как $(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$, имеет место соотношение

$$d\,(I\ddot{a})_{\overline{n}|} + (IA)_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|}. \tag{2.3.9}$$

Для срочного аннуитета по определению математического ожидания

$$E(I\ddot{a})_{\overline{Z}|} = (I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(I\ddot{a})_{\overline{k+1}|}\cdot{}_{k|}q_x + (I\ddot{a})_{\overline{n}|}\cdot{}_kp_x.$$

Для преобразования $(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$ рассмотрим величины

$$P_k = \begin{cases} (k+1),\ k<n, \\ 0,\ k \ge n. \end{cases}$$

Теперь срочный аннуитет будем рассматривать как бессрочный с годовой выплатой объема P_k. Тогда

$$(I\ddot{a})_{\overline{Z}|} = \sum_{k=0}^{K(x)} P_k \cdot v^k,$$

следовательно,

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} P_j \cdot v^j \cdot {}_{k|}q_x = \sum_{j=0}^{\infty} P_j \cdot v^j \sum_{k=j}^{\infty} {}_{k|}q_x = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\, v^j\, {}_jp_x. \qquad (2.3.10)$$

Совершенно аналогично показывается, что ожидаемая современная стоимость выплат по n-годичному аннуитету-постнумерандо равна

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \sum_{j=1}^{n} j\, v^j\, {}_jp_x. \qquad (2.3.11)$$

В случае возрастающего аннуитета-постнумерандо выплата величины k производится в момент времени k, поэтому текущая стоимость этих выплат составляет

$$(Ia)_{\overline{n}|} = v + 2v^2 + 3v^3 + \ldots + n\, v^n.$$

Для бессрочного аннуитета-постнумерандо его текущая стоимость равна

$$(Ia)_{\overline{K(x)}|} = v + 2v^2 + 3v^3 + \ldots + K(x) v^{K(x)} = (I\ddot{a})_{\overline{K(x)+1}|} - \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|},$$

следовательно, единовременные нетто-премии по бессрочным аннуитетам возрастающей величины связаны соотношением

$$(I\ddot{a})_x = (Ia)_x + \ddot{a}_x.$$

Рассмотрим аналог последнего равенства для случая срочных аннуитетов. Исходя из (2.3.10), имеем

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\, v^j\, {}_jp_x = 1 + 2\, v p_x + 3\, v^2\, {}_2p_x + \ldots + n\, v^{n-1}\, {}_{n-1}p_x =$$

$$= (1 + v p_x + v^2\, {}_2p_x + \ldots + v^{n-1}\, {}_{n-1}p_x) + (v p_x + 2\, v^2\, {}_2p_x + \ldots + (n-1) v^{n-1}\, {}_{n-1}p_x).$$

Отсюда следует соотношение для срочных аннуитетов возрастающей величины

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + (Ia)_{x:\overline{n-1}|}.$$

Пример. Выразить величину $(Ia)_{x:\overline{n}|}$ через $(Ia)_{x+1:\overline{n-1}|}$.

Решение. Величина $(Ia)_{x:\overline{n}|}$ исходя из (2.3.11) равна

$$\sum_{j=1}^{n} j v^j {}_jp_x = v p_x\left(1+\sum_{k=2}^{n} k v^{k-1} \frac{l_{x+k}}{l_{x+1}}\right)=$$

$$= v p_x\left(1+\sum_{k=2}^{n}(k-1)v^{k-1}\frac{l_{x+1+k-1}}{l_{x+1}}+\sum_{k=2}^{n} v^{k-1}{}_{k-1}q_{x+1}\right)=$$

$$= v p_x\left(1+\sum_{k=1}^{n-1} k v^k \frac{l_{x+1}}{l_{x+1}}+\sum_{k=1}^{n-1} v^k{}_kq_{x+1}\right).$$

Следовательно,

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = v p_x(1+(Ia)_{x+1:\overline{n-1}|}+a_{x+1:\overline{n-1}|}).$$

Рассмотрим коммутационные числа, необходимые для вычисления единовременных нетто-премий по аннуитетам. Наиболее простой случай — единовременные премии по бессрочным взносам постоянной величины:

$$\ddot{a}_x=\sum_{k=0}^{\infty} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x}.$$

Умножив обе части данного равенства на D_x, получим

$$D_x\ddot{a}_x=\sum_{k=0}^{\infty} v^{x+k} l_{x+k}=\sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}.$$

Введем коммутационное число $N_x=\sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}$. С помощью чисел N_x придем к выражению для $\ddot{a}_x$:

$$\ddot{a}_x=N_x/D_x. \qquad (2.3.12)$$

Таким же образом рассматривается случай срочных взносов:

$$D_x\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=\sum_{k=0}^{n-1} v^{x+k} l_{x+k}=\sum_{k=0}^{\infty} v^{x+k} l_{x+k}-\sum_{k=n}^{\infty} v^{x+k} l_{x+k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}-\sum_{k=n}^{\infty} D_{x+n+k-n}=N_x-N_{x+n}.$$

Отсюда получаем аналог равенства (2.3.12):

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=\frac{N_x-N_{x+n}}{D_x}.$$

Для аннуитета-постнумерандо

$$D_x a_{x:\overline{n}|}=\sum_{k=1}^{n} v^{x+k} l_{x+k}=\sum_{k=0}^{n-1} v^{x+1+k} l_{x+1+k}=N_{x+1}-N_{x+1+n},$$

откуда единовременная нетто-премия равна

$$a_{x:\overline{n}|}=\frac{N_{x+1}-N_{x+1+n}}{D_x}.$$

Пример. Требуется вычислить по табл. П.2 единовременную нетто-премию по авансовым взносам, которые [50] будет выплачивать в течение 10 лет.

Решение. Искомая величина составляет

$$\ddot{a}_{[50]:\overline{10}|}=\frac{N_{[50]}-N_{60}}{D_{[50]}}=8{,}23 \text{ (руб.)}.$$

Для аннуитетов возрастающей величины необходимо ввести еще коммутационные числа. Именно умножим на D_x равенство $(I\ddot{a})_x=\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\,v^j\,{}_jp_x$ и получим

$$D_x\,(I\ddot{a})_x=\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\,v^{x+j}\,l_{x+j}=\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\,D_{x+j}.$$

Последняя сумма преобразуется как

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\,D_{x+j}=(D_x+D_{x+1}+D_{x+2}+D_{x+3}+\ldots)+$$
$$+(D_{x+1}+D_{x+2}+D_{x+3}+\ldots)+(D_{x+2}+D_{x+3}+\ldots)=N_x+N_{x+1}+N_{x+2}+\ldots$$

Ряд $N_x+N_{x+1}+N_{x+2}+\ldots$ обозначается как S_x, через коммутационные числа S_x выражается единовременная нетто-премия $(I\ddot{a})_x$:

$$(I\ddot{a})_x=S_x/D_x.$$

Для более сложного случая срочного взноса возрастающей величины равенство

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}=\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\,v^j\,{}_jp_x,$$

как и в предыдущем случае, умножается на D_x:

$$D_x\,(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}=\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\,v^{x+j}\,l_{x+j}=\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\,D_{x+j}=$$
$$=\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\,D_{x+j}-\sum_{j=n}^{\infty}(j+1)\,D_{x+j}=S_x-\sum_{j=n}^{\infty}(j-n+1+n)\,D_{x+n+j}=$$
$$=S_x-\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\,D_{x+n+j}-n\sum_{j=0}^{\infty}D_{x+n+j}=S_x-S_{x+n}-n\,N_{x+n}.$$

Следовательно, величина $(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$ выражается через коммутационные числа:

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}=\frac{S_x-S_{x+n}-nN_{x+n}}{D_x}.$$

Пример. Выразить единовременную нетто-премию $(Ia)_{x:\overline{n}|}$ через коммутационные числа.

Решение. Равенство (2.3.11) умножим на D_x, тогда

$$D_x(Ia)_{x:\overline{n}|}=\sum_{j=1}^{n} j v^j l_{x+j}=\sum_{j=1}^{n} jD_{x+1+j-1}=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)D_{x+1+k}.$$

Повторяя дословно рассуждения для выражения единовременной нетто-премии по аннуитету-пренумерандо с заменой x на $x+1$, отсюда получим

$$(Ia)_{x:\overline{n}|}=\frac{S_{x+1}-S_{x+n+1}-nN_{x+n}}{D_x}.$$

Пример. Выразить коммутационное число R_x через S_x и N_x.

Решение. Воспользуемся равенством (2.3.8):

$$d(I\ddot{a})_x+(IA)_x=d\frac{S_x}{D_x}+\frac{R_x}{D_x}=\frac{N_x}{D_x}=\ddot{a}_x,$$

откуда $R_x=N_x-dS_x$.

2.4. Кратные и непрерывные аннуитеты

Рассмотрим аннуитеты, в которых выплаты производятся m раз в год, где $m>1$. Величина каждой выплаты при этом равна $\frac{1}{m}$, поэтому годовой объем выплат равен единице. Типичными примерами кратного аннуитета являются ежемесячная плата за квартиру, здесь $m=12$, или производимая два раза в месяц оплата труда, здесь уже $m=24$. Выплаты аннуитета на $k+1$-м году осуществляются в моменты времени

$$k,\ k+\frac{1}{m},\ldots,\ k+\frac{m-1}{m}$$

для аннуитета-пренумерандо (авансового аннуитета, взноса) и соответственно в моменты $k+\frac{1}{m}$, $k+\frac{2}{m},\ldots$, $k+1$ для случая постнумерандо (задолженного аннуитета). Для каждой пары n и s неотрицательных целых чисел текущая цена гарантированного аннуитета-пренумерандо, выплачиваемого в течение срока $n+\frac{s}{m}$, обозначается через $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n+s/m}|}$ и в случае $n\geq 1$ равна

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n+s/m}|}=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}v^{k+j/m}+\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{s-1}v^{n+j/m}=$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{v^k(1-v)}{1-v^{1/m}}+\frac{v^n}{m}\frac{1-v^{s/m}}{1-v^{1/m}}=$$

$$=\frac{1}{m}\frac{1-v}{1-v^{1/m}}\frac{1-v^n}{1-v}+\frac{v^n}{m}\frac{1-v^{s/m}}{1-v^{1/m}}=\frac{1}{m}\frac{1-v^{n+s/m}}{1-v^{1/m}}.$$

Для случая $n=0$ эта величина составляет

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{s/m}|}=\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{s-1}v^{j/m}=\frac{1}{m}\frac{1-v^{s/m}}{1-v^{1/m}}.$$

Следовательно, для бессрочного аннуитета-пренумерандо с выплатами m раз в год выплачиваемая (x) текущая стоимость, определяемая через текущую стоимость гарантированного аннуитета, равна

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K(x)+S_m}|}=\frac{1}{m}\frac{1-v^{K(x)+S_m}}{1-v^{1/m}}. \tag{2.4.1}$$

Здесь, как и ранее, случайная величина $K(x)=[T(x)]$ — целая часть $T(x)$, а

$$S_m=\frac{[m(T(x)-K(x))]+1}{m}\in\left\{\frac{1}{m},\frac{2}{m},\ldots,\frac{m}{m}=1\right\}.$$

Для каждого $j=1,2,\ldots,m$ справедливо: если $T(x)-K(x)\in\left[\frac{j-1}{m},\frac{j}{m}\right)$, то $m(T(x)-K(x))\in[j-1,j)$, следовательно, $[m(T(x)-K(x))]+1=j$. Таким образом, случайная величина S_m принимает значение $\frac{j}{m}$, $j=1,2,3,\ldots,m$, в том и только в том случае, если дробная часть $S(x)$ случайной величины $T(x)$, равная разности $T(x)-S(x)$, удовлетворяет условию $T(x)-K(x)\in\left[\frac{j-1}{m},\frac{j}{m}\right)$. Произведение $m(1-v^{1/m})$, называемое m-кратным дисконтом годовой нормы доходности i, обозначается как $d^{(m)}$. В таких обозначениях случайная величина составляет

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K(x)+S_m}|}=\frac{1-v^{K(x)+S_m}}{d^{(m)}}.$$

Единовременная нетто-премия по данному аннуитету обозначается через $\ddot{a}^{(m)}_x$ и равна

$$\ddot{a}^{(m)}_x=E(\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K(x)+S_m}|})=\frac{1-E(v^{K(x)+S_m})}{d^{(m)}}.$$

Поскольку случайная величина $v^{K(x)+S_m}$ является текущей стоимостью выплат бессрочного страхования жизни с моментами выплат в конце m-й части года, то единовременная нетто-премия по аннуитету выражается как

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - A^{(m)}}{d^{(m)}}.$$

Последнее выражение можно переписать в виде

$$d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)} = 1. \qquad (2.4.2)$$

Для срочных аннуитетов предположим, что выплаты производятся в начале каждой m-й части года в течение n лет, где n — натуральное число. Современная стоимость аннуитета представляет собой случайную величину

$$Y^{(m)} = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K(x)+S_m}|}, & K(x) < n, \\ \ddot{a}_{\overline{n}|}, & K(x) \geq n. \end{cases}$$

Поскольку случайная величина $Y^{(m)}$ из (2.4.1) представима как

$$Y^{(m)} = \frac{1 - v^{\min(n,\, K(x)+S_m)}}{d^{(m)}} = \begin{cases} (1 - v^{K(x)+S_m}) / d^{(m)}, & K(x) < n, \\ (1 - v^n) / d, & K(x) \geq n, \end{cases}$$

то единовременная нетто-премия по аннуитету-пренумерандо, выплачиваемому в течение n лет m раз в год, обозначаемая через $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$, равна $E\,Y^{(m)} = \dfrac{1 - A_{x:\overline{n}|}^{(m)}}{d^{(m)}}$. Из (2.3.3) следует аналог равенства (2.4.2) для срочных аннуитетов:

$$d^{(m)}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} + A_{x:\overline{n}|}^{(m)} = 1. \qquad (2.4.3)$$

Как и для случая $m = 1$, несложно показать, что

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j}{m}} \cdot {}_{k+\frac{j}{m}}p_x.$$

Для аннуитета-постумерандо, выплачиваемого m раз в год в течение n лет, единовременная нетто-премия равна

$$a_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} v^{k+\frac{j}{m}} \cdot {}_{k+\frac{j}{m}}p_x.$$

Следовательно, единовременные нетто-премии по срочным кратным аннуитетам связаны равенством

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} - a^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{m}(1 - {}_nE_x). \qquad (2.4.4)$$

Равенство (2.4.3) дает возможность получить выражение для $\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ через $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$. Для этого следует приравнять левые части равенства (2.3.3) и (2.4.3) для произвольного m, откуда при равномерном распределении смертей внутри каждого целочисленного интервала

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \frac{A_{x:\overline{n}|} - A^{(m)}_{x:\overline{n}|}}{d^{(m)}} = \frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \frac{A^{1}_{x:\overline{n}|} - A^{1(m)}_{x:\overline{n}|}}{d^{(m)}} =$$

$$= \frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}\left(1 - \frac{i}{i^{(m)}}\right)}{d^{(m)}} = \frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \frac{1 - \frac{i}{i^{(m)}}}{d^{(m)}}(A_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x) =$$

$$= \frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \frac{1 - \frac{i}{i^{(m)}}}{d^{(m)}}(1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|})\frac{i^{(m)} - i}{i^{(m)}d^{(m)}} - {}_nE_x =$$

$$= \frac{d}{d^{(m)}}\left(1 + \frac{i^{(m)} - i}{i^{(m)}}\right)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{i^{(m)} - i}{i^{(m)}d^{(m)}}(1 - {}_nE_x) =$$

$$= \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - {}_nE_x),$$

поскольку гипотеза равномерного распределения смертей дает $A^{1(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{i^{(m)}}A^{1}_{x:\overline{n}|}$. Здесь коэффициенты равны

$$\alpha(m) = \frac{d}{d^{(m)}}\left(1 + \frac{i^{(m)} - i}{i^{(m)}}\right), \ \beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}.$$

Их можно вычислять непосредственно, но при малых значениях нормы доходности i, а значит, и силы процента δ можно воспользоваться их приближениями, которые получаются из следующих преобразований. Из определения силы процента находим

$$i^{(m)} = m((1+i)^{1/m} - 1) = \delta\frac{e^{\delta/m} - 1}{\delta/m} = \delta\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\delta}{m} + o\left(\frac{\delta}{m}\right)\right).$$

Отсюда, в частности, вытекает, что с ростом m значение $i^{(m)}$ убывает. Поэтому $\delta < i^{(m)} < i^{(1)} = i$. Далее,

$$d^{(m)} = m(1 - v^{1/m}) =$$

$$= \frac{1-e^{-\delta/m}}{1/m} = \delta\frac{1-(1-\delta/m+0{,}5(\delta/m)^2+o(\delta/m)^2)}{\delta/m} =$$

$$= \delta\left(1-\frac{1}{2}\frac{\delta}{m}+o\left(\frac{\delta}{m}\right)\right),$$

откуда следует, что $i^{(m)} - d^{(m)} = \dfrac{\delta^2}{m} + o\left(\dfrac{\delta^2}{m}\right) > 0$ и с ростом m значение $d^{(m)}$ возрастает. Кроме того, $i^{(m)}$ и $d^{(m)}$ связаны соотношениями

$$i^{(1)} = i > i^{(m)} > \delta > d^{(m)} > d^{(1)} = d,$$

$$\frac{d}{d^{(m)}} = \frac{\delta\left(1-\frac{1}{2}\frac{\delta}{1}+o(\delta)\right)}{\delta\left(1-\frac{1}{2}\frac{\delta}{m}+o\left(\frac{\delta}{m}\right)\right)} = 1-0{,}5\delta+o(\delta),$$

$$\frac{i^{(m)}-i}{i^{(m)}} = 1-\frac{i}{i^{(m)}} = 1-\frac{1+\frac{1}{2}\delta+o(\delta)}{1+\frac{1}{2}\frac{\delta}{m}+o\left(\frac{\delta}{m}\right)} = -\frac{1}{2}\delta\left(1-\frac{1}{m}\right)+o(\delta),$$

$$\alpha(m) = (1-0{,}5\delta+o(\delta))\left(1-\frac{1}{2}\delta+o(\delta)\right) = 1-\delta+o(\delta),$$

$$\beta(m) = \frac{\frac{1}{2}\delta\left(1-\frac{1}{m}\right)+o(\delta)}{\delta\left(1-\frac{1}{2}\frac{\delta}{m}+o\left(\frac{\delta}{m}\right)\right)} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+o(1).$$

Отсюда вытекает, что величины $\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ при малых δ хорошо аппроксимируются формулой

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{2}((m-1)/m)(1-{}_nE_x). \qquad (2.4.5)$$

Равенство (2.4.5) при $n=\infty$, т.е. для случая пожизненных аннуитетов-пренумерандо, принимает вид

$$\ddot{a}^{(m)}_x = \ddot{a}_x - (m-1)/2m. \qquad (2.4.6)$$

Пример. Требуется вычислить $a^{(12)}_{[50]}$, исходя из данных табл. П.4.

Решение. Из (2.4.6) получаем

$$a_{[50]}^{(12)} = \ddot{a}_{[50]}^{(12)} - \frac{m-1}{2m} - \frac{1}{m} = \ddot{a}_{[50]}^{(12)} - \frac{m+1}{2m} = \frac{N_{[50]}}{D_{[50]}} - \frac{m+1}{2m} =$$

$$= 73\,544{,}823 / 4581{,}3224 - 13/24 = 16{,}053 - 0{,}5417 = 15{,}5113.$$

Пример. Годовой размер взноса, выплачиваемый [50] в течение 10 лет, составляет 360 000 руб., взносы выплачиваются в начале каждого квартала. Чему равна стоимость этого аннуитета согласно табл. П.4? Как изменится стоимость данного аннуитета, если весь его годовой объем не разбивать на кварталы, а выплачивать в начале каждого года?

Решение. Из (2.4.5) искомая стоимость аннуитета равна

$$360\,000 \cdot \ddot{a}_{[50]:\overline{10|}}^{(12)} = 360\,000 \cdot (\ddot{a}_{[50]:\overline{10|}} - 0{,}375(1 - D_{60}/D_{[50]})) =$$

$$= 360\,000 \cdot (((N_{[50]} - N_{60})/D_{[50]}) - 0{,}375(1 - 2855{,}5942/4581{,}3224)) =$$

$$= 360\,000\,((73\,544{,}823 - 35\,841{,}261)/\,4581{,}3224 -$$

$$- 0{,}375\,(1 - 2855{,}5942/4581{,}3224)) = 2\,911\,890{,}47 \text{ (руб.)}.$$

Если аннуитет не распределять по кварталам, то стоимость взноса составит

$$360\,000 \cdot \ddot{a}_{[50]:\overline{10|}} = 2\,962\,743 \text{ (руб.)},$$

что превосходит первую величину на 1,75%.

Пример. Вычислить $a_{60:\overline{10|}}^{(12)}$, исходя из табл. П.4.

Решение. Равенства (2.4.4), (2.4.5) дают

$$a_{60:\overline{10|}}^{(12)} = \ddot{a}_{60:\overline{10|}}^{(12)} - \frac{1}{12}(1 - {}_{10}E_{60}) = \ddot{a}_{60:\overline{10|}} - (1 - {}_{10}E_{60}) =$$

$$= \frac{N_{60} - N_{70}}{D_{60}} - \frac{1}{12}\left(1 - \frac{D_{70}}{D_{60}}\right) =$$

$$= (35\,841{,}261 - 13\,587{,}893)/2855{,}5942 -$$

$$- (1 - 1516{,}9972/2855{,}5942)/12 = 7{,}75384.$$

При увеличении частоты аннуитета, т.е. значения m, удобно считать такой аннуитет непрерывным. Это означает, что рассматривается непрерывный денежный поток единичной интенсивности. Следовательно, за интервал времени длиной t получателю поступает t денежных единиц, современная стоимость этих денег с учетом дисконтирования равна

$$\bar{a}_{\overline{t}|} = \int_0^t v^s ds = \frac{1 - v^t}{\delta}.$$

Если непрерывный аннуитет рассматривать как непрерывно вносимый страхователем взнос единичной величины, то для пожизненно вносимого взноса его современная стоимость составляет

$$Y = \bar{a}_{\overline{T(x)}|} = \frac{1 - v^{T(x)}}{\delta},$$

где x — возраст страхователя на момент начала внесения взноса. Случайная величина Y, таким образом, удовлетворяет равенству

$$1 = Z + \delta Y,$$

где Z — современная стоимость выплат для бессрочного страхования жизни с незамедлительной выплатой по страховому случаю. Беря математическое ожидание от обеих частей последнего равенства, получаем соотношение

$$1 = A_x + \delta \bar{a}_x.$$

Здесь $\bar{a}_x$ — единовременная нетто-премия по данному аннуитету. Для аннуитета, выплачиваемого в течение n лет, его современная стоимость будет определяться через случайную величину

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T(x)}|}, & T(x) < n, \\ \bar{a}_{\overline{n}|}, & T(x) \geq n. \end{cases}$$

Ожидаемая современная стоимость, т.е. единовременная нетто-премия по такому аннуитету, определяемая как математическое ожидание случайной величины Y, обозначается через $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ и удовлетворяет равенству

$$1 = \bar{A}_{x:\overline{n}|} + \delta\, \bar{a}_{x:\overline{n}|}.$$

Последнее равенство позволяет вычислять единовременные нетто-премии по аннуитетам через соответствующие премии страховых полисов, и наоборот.

Пример. Требуется определить стоимость годового аннуитета, поступающего в размере 2000 руб. в начале каждой половины месяца. В настоящее время возраст получателя 58 лет, расчетная норма доходности 4%. Вычисления проводить на основе селективной табл. П.4. Предполагая равномерное распределение смертей на каждом целочисленном интервале, сравнить полученное значение с приближенно вычисленным значением как непрерывного аннуитета.

Решение. Стоимость данного аннуитета равна

$$2000\ddot{a}^{(24)}_{[50]:\overline{1}|} = 2000\left(\ddot{a}_{[50]:\overline{1}|} - \frac{23}{48}\left(1 - \frac{D_{[50]+1}}{D_{[50]}}\right)\right) =$$

$$= 2000\,((41\,967{,}525 - 38\,855{,}540)/3131{,}985 -$$

$$-23(1 - 2994{,}278/3131{,}985)/48) = 1945{,}093.$$

Если вычислять приближенное значение этой стоимости как единовременную нетто-премию по непрерывному аннуитету, то оно будет равно

$$\frac{1 - \bar{A}_{[58]:\overline{1}|}}{\delta} = \frac{1 - \frac{i}{\delta}A^{1}_{[58]:\overline{1}|} - A_{[58]:\overset{1}{\overline{1}|}}}{\delta} =$$

$$= \left(1 - \frac{0{,}04}{\ln 1{,}04}\,\frac{M_{[58]} - M_{[58]+1}}{D_{[58]}} - \frac{D_{[58]+1}}{D_{[58]}}\right)\Big/\ln 1{,}04 =$$

$$= 2000\,(1 - 1{,}01987\,(1517{,}85 - 1500{,}605)/3131{,}99 -$$

$$-2994{,}28/3131{,}99)/0{,}039 = 1955{,}71.$$

Полученные значения показывают, что при вычислении стоимости кратного аннуитета при больших частотах выплат относительная погрешность вычислений будет мала. В данном примере она составила 0,055%.

Единовременную нетто-премию по непрерывному аннуитету можно вычислять и непосредственно через коммутационные числа. Для этого их выражения следует преобразовать. Например, для бессрочного аннуитета его единовременная нетто-премия $\bar{a}_x$ равна $\lim_{A\to\infty}\int_0^A \bar{a}_{\overline{t}|}\,dF_{T(x)}(t)$, при этом для всех $A > 0$ интегрирование по частям дает

$$\int_0^A \bar{a}_{\overline{t}|} dF_{T(x)}(t) = -\int_0^A \bar{a}_{\overline{t}|} d(1 - F_{T(x)}(t)) = -\bar{a}_{\overline{t}|}(1 - F_{T(x)}(t))|_0^A +$$

$$+\int_0^A v^t(1 - F_{T(x)}(t))dt = \int_0^A v^t{}_t p_x dt - \bar{a}_{\overline{A}|}(1 - F_{T(x)}(A)).$$

Здесь было использовано равенство $\frac{d}{dt}\bar{a}_{\overline{t}|} = v^t$. Кроме того,

$$\bar{a}_{\overline{A}|}(1 - F_{T(x)}(A)) = \int_A^\infty \bar{a}_{\overline{A}|} f_{T(x)}(t)dt \le \int_A^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} f_{T(x)}(t)dt.$$

Поэтому при условии существования конечного математического ожидания случайной величины $\bar{a}_{\overline{T(x)}|}$, т.е. $\bar{a}_x = \int_0^\infty a_{\overline{t}|} f_{T(x)}(t)dt$, величина $\bar{a}_{\overline{A}}(1 - F_{T(x)}(A))$ стремится к нулю при увеличении A. Следовательно, при стремлении A к бесконечности получается равенство

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t{}_t p_x dt.$$

Для случая срочного аннуитета аналогично имеем равенство

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t{}_t p_x dt. \qquad (2.4.7)$$

Умножая равенство для $\bar{a}_x$ на коммутационное число D_x, получаем

$$D_x \bar{a}_x = \int_0^\infty v^{x+t} l_{x+t} dt.$$

Величина $\int_0^1 v^{x+t} l_{x+t} dt$ обозначается через $\overline{D}_x$. Коммутационное число $\overline{D}_x$ применяется для выражения актуарных характеристик в случае непрерывных аннуитетов. С его помощью определяется коммутационное число $\overline{N}_x = \sum_{k=0}^\infty \overline{D}_{x+k}$. Число $\overline{N}_x$ можно представить в виде

$$\overline{N}_x = \int_0^\infty v^{x+t} l_{x+t} dt = \int_0^\infty \overline{D}_{x+k} dt.$$

Тогда $\bar{a}_x$ выражается через коммутационные числа:

$$\bar{a}_x = \overline{N}_x / D_x.$$

Вследствие равенства

$$\int_0^n \overline{D}_{x+t}\,dt = \overline{N}_x - \overline{N}_{x+n}$$

для срочного непрерывного аннуитета справедливо представление

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = (\overline{N}_x - \overline{N}_{x+n}) / D_x.$$

Пример. Исходя из табл. П.1, найти значение $\bar{a}_{25:\overline{14}|}$.

Решение. Величина $\bar{a}_{25:\overline{14}|} = \dfrac{\overline{N}_{25} - \overline{N}_{39}}{D_{25}} =$

$= (742\,891 - 358\,731) / 35\,919 = 10{,}69518.$

Пример. Доказать соотношение $\bar{a}_x = \bar{a}_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x \cdot \bar{a}_{x+n}$.

Решение. Из равенства

$$\int_n^\infty v^t\,{}_tp_x dt = \frac{v^n l_{x+n}}{l_x}\int_n^\infty v^{t-n}\frac{l_{x+n+t-n}}{l_{x+n}}dt = {}_nE_x \cdot \bar{a}_{x+n}$$

следует $\bar{a}_x = \int_0^n v^t\,{}_tp_x dt + \int_n^\infty v^t\,{}_tp_x dt = \bar{a}_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x \cdot \bar{a}_{x+n}$, что и требовалось доказать.

Пример. Определить величину $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$, если на интервале $(x, x+n)$ сила смертности постоянна и равна μ, а сила процента равна δ.

Решение. При данных условиях $v^t = e^{-\delta t}$, а ${}_tp_x = e^{-\mu t}$, поэтому

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t e^{\mu t} dt = \int_0^n e^{-(\delta+\mu)} dt = \frac{1}{\delta+\mu}\left(1 - e^{-(\delta+\mu)n}\right).$$

Пример. Найти выражение для дисперсии случайной величины текущей стоимости бессрочного непрерывного аннуитета.

Решение. Для второго момента случайной величины Y справедливо

$$E[Y^2] = \int_0^\infty (\bar{a}_{\overline{t}|})^2 dF_{T(x)}(t) = \int_0^\infty \frac{(1-v^t)^2}{\delta^2} dF_{T(x)}(t) = \int_0^\infty \frac{1 - 2v^t + v^{2t}}{\delta^2} dF_{T(x)}(t) =$$

$$= \int_0^\infty \frac{2}{\delta}\,\frac{1-v^t}{\delta} dF_{T(x)}(t) - \int_0^\infty \frac{2}{\delta}\,\frac{1-v^{2t}}{2\delta} dF_{T(x)}(t) = \frac{2}{\delta}\bar{a}_x - \frac{2}{\delta}\,{}^2\bar{a}_x.$$

Здесь верхний индекс «2» в символе ${}^2\bar{a}_x$ означает, что $\bar{a}_x$ вычисляется при удвоенной силе процента 2δ по той же формуле, что и $\bar{a}_x$. Дифференциал функции распределения случайной величины $T(x)$, а именно $dF_{T(x)}(t)$, равен ${}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt$. Таким образом, искомая дисперсия составляет

$$DY = \frac{2}{\delta}\,\bar{a}_x - \frac{2}{\delta}\,{}^2\bar{a}_x - (\bar{a}_x)^2.$$

Пример. Исходя из табл. П.1, вычислить значение $\bar{A}_{40:\overline{25}|}$.

Решение. Сначала найдем $\bar{a}_{40:\overline{25}|}$:

$$\bar{a}_{40:\overline{25}|} = \frac{\bar{N}_{40} - \bar{N}_{65}}{D_{40}} = (338\,786 - 47\,723{,}0)\,/\,19\,535 = 14{,}89956.$$

Теперь $\bar{A}_{40:\overline{25}|} = 1 - 14{,}89956\,\ln 1{,}04 = 0{,}584372.$

Глава 3.

РЕГУЛЯРНЫЕ ПРЕМИИ

Единовременные нетто-премии определялись как среднее значение текущих страховых выплат. Тем самым подразумевалось, что если отвлечься от рисковой надбавки, от расходов на ведение дела, уплаты налогов и т.д., то страхователь в обмен на будущее страховое вознаграждение должен внести указанную премию. Таким образом, при определении единовременной нетто-премии мы исходили из равенства средних текущих обязательств страхователя и страховщика. Вместо внесения единовременной премии страхователь может выплачивать регулярные премии определенной величины. При этом размер каждой регулярной премии, так же как и в случае единовременной нетто-премии, определяется исходя из принципа эквивалентности, который состоит в том, что ожидаемая современная стоимость страховых выплат должна совпадать с аналогичной стоимостью страховых премий. Это означает, что средняя стоимость страховых выплат на момент заключения страхового договора должна совпадать со средней стоимостью премий на тот же момент времени. Для дальнейшего полезно ввести понятие случайной величины убытка как разности между текущей стоимостью страховых выплат и текущей стоимостью премий и выражать эту случайную величину через L. Например, для рассмотренных ранее разовых премий в случае пожизненного страхования с единичной выплатой в момент смерти

$$L = v^{T(x)} - A_x.$$

При этом A_x определяется нами из условия

$$E(L) = 0.$$

Аналогично обстоит дело с другими рассмотренными выше видами страхования. В общем виде случайная величина убытка определяется как разность

$$L = Z - Y,$$

где Z — текущая стоимость страховых выплат, а Y —текущая стоимость премий.

3.1. Регулярные нетто-премии

Рассмотрим сначала случай, когда условие баланса учитывает только страховые выплаты, обозначенные в договоре страхования. Данное предположение, безусловно, является идеализацией процесса назначения премий, но при этом будут получены факты, необходимые для дальнейшей работы с учетом дополнительных расходов компании. Для регулярных премий вид случайной величины текущей стоимости премий имеет вид

$$Y=\sum_{k=0}^{\infty} v^k \pi_k.$$

Здесь π_k — величина премии в начале $k+1$-го года действия страхового полиса, т.е. для возраста страхователя, равного $x+k$. Если речь идет о регулярных нетто-премиях постоянной величины, т.е. в случае $\pi_k=\pi$, принцип обозначения регулярных премий такой же, как и для единовременных. Например, для смешанного страхования на срок n лет, когда регулярная премия вносится в начале каждого года, она обозначается как $P_{x:\overline{n}|}$. Здесь правый нижний индекс указывает на вид страхования.

Если премия вносится не раз в год, а в начале каждой m-й части года, то появляется верхний правый индекс (m): $P^{(m)}_{x:\overline{n}|}$. Кроме того, если регулярные премии вносятся не в течение всего срока страхования, а в течение h лет, то для указания этого условия появляется левый верхний индекс: ${}^{h}P^{(m)}_{x:\overline{n}|}$. Вид страхования бывает удобно указывать не в нижнем индексе, а в скобках. Например, для регулярной нетто-премии по страхованию аннуитета, выплачиваемого начиная с возраста $x+n$ ежегодно в течение k лет при условии выплаты данной премии в течение h лет в начале каждого года, обозначение для регулярной премии будет ${}^{h}P({}_{n|k}\ddot{a}_x)$. При этом, естественно, должно быть $h\le n$. Полезно отметить, что в данном случае условие баланса для этой премии имеет вид

$${}_{n|k}\ddot{a}_x={}^{h}P({}_{n|k}\ddot{a}_x)\cdot \ddot{a}_{x:\overline{h}|}.$$

Кроме того, случайная величина текущей стоимости страховых выплат равна

$$Z=\begin{cases} 0,\ K(x)=0,1,\ldots,n-1,\\ {}_nE_x\cdot \ddot{a}_{\overline{K(x+n)+1}|},\ K(x)=n,n+1,\ldots,n+k-1,\\ {}_nE_x\cdot \ddot{a}_{\overline{k}|},\ K(x)\ge n+k. \end{cases}$$

В то же время случайная величина текущей стоимости премий составляет

$$Y=\begin{cases} {}^hP({}_{n|k}\ddot{a}_x)\cdot\ddot{a}_{\overline{K(x+n)+1}|},\ K(x)=0,1,\ldots,h-1,\\ {}^hP({}_{n|k}\ddot{a}_x)\cdot\ddot{a}_{\overline{h}|},\ K(x)\geq h.\end{cases}$$

Следовательно, случайная величина текущего убытка равна

$$L=Z-Y=\begin{cases} -{}^hP({}_{n|k}\ddot{a}_x)\cdot\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|},\ K(x)=0,1,\ldots,h-1,\\ -{}^hP({}_{n|k}\ddot{a}_x)\cdot\ddot{a}_{\overline{h}|},\ K(x)=h,h+1,\ldots,n-1,\\ {}_nE_x\cdot\ddot{a}_{\overline{K(x+n)+1}|}-{}^hP({}_{n|k}\ddot{a}_x)\cdot\ddot{a}_{\overline{h}|},\ K(x)=n,n+1,\ldots,n+k-1,\\ {}_nE_x\cdot\ddot{a}_{\overline{k}|}-{}^hP({}_{n|k}\ddot{a}_x)\cdot\ddot{a}_{\overline{h}|},\ K(x)\geq n+k.\end{cases}$$

Условие баланса можно выписать более подробно:

$${}_nE_x\cdot\ddot{a}_{x+n:\overline{k}|}={}^hP({}_{n|k}\ddot{a}_x)\cdot\ddot{a}_{x:\overline{h}|}.$$

Далее, для страхования дожития до возраста $x+n$ лет условие баланса имеет вид

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}={}^hP_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\cdot\ddot{a}_{x:\overline{h}|}.$$

Здесь, как и в предыдущем случае, величина h — период уплаты премий, при этом, естественно, $h\leq n$. Случайная величина убытка для страхования дожития в таком случае составляет

$$L=\begin{cases} -{}^hP_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\cdot\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|},\ K(x)=0,1,\ldots,h-1,\\ -{}^hP_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\cdot\ddot{a}_{\overline{h}|},\ K(x)=h,h+1,\ldots,n-1,\\ v^n-{}^hP_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\cdot\ddot{a}_{\overline{h}|},\ K(x)\geq n.\end{cases}$$

В частности, при $h=n$ случайная величина убытка будет равна

$$L=\begin{cases} -P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\cdot\ddot{a}_{\overline{K(x+n)+1}|},\ K(x)=0,1,\ldots,n-1,\\ v^n-P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|},\ K(x)\geq n.\end{cases}$$

При этом регулярная годовая премия находится из равенства

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}=P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}.$$

Для страхования жизни на срок n лет в том случае, когда период уплаты премий совпадает со сроком действия полиса, уравнение баланса имеет вид

$$A^1_{x:\overline{n}|} = P^1_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|},$$

при этом случайная величина убытка определяется как

$$L = \begin{cases} v^{K(x)+1} - P^1_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{K(x)+1}|}, \; K(x) = 0, 1, \ldots, n-1, \\ -P^1_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}, \; K(x) \geq n. \end{cases}$$

Регулярная нетто-премия по смешанному страхованию равна сумме регулярных премий по страхованию жизни и страхованию дожития:

$$P_{x:\overline{n}|} = P^1_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}.$$

Необходимо заметить, что регулярные премии вносятся, как правило, в начале каждого года (или m-й части года). Кроме того, приведенные рассуждения справедливы для единичной страховой выплаты. В противном случае значение регулярной премии умножается на величину соответствующей страховой суммы.

Из приведенных случаев видно, что общий принцип обозначений для регулярных нетто-премий состоит в том, что верхний левый индекс у символа «P» служит для указания длины периода внесения взносов страхователем, а правые индексы — для описания страховой выплаты.

Пример. [55] заключил договор на страхование дожития на срок 10 лет со страховой суммой 100 000 руб. Ежегодные премии выплачиваются в начале каждого года в течение 5 лет. В соответствии с табл. П.3, П.4 требуется вычислить значение годовой нетто-премии.

Решение. Единовременная нетто-премия в данном случае равна

$$100\,000 \cdot A_{55:\overset{1}{\overline{10}|}} = 100\,000 \cdot D_{65} / D_{[55]} =$$

$$= 100\,000 \cdot (3638{,}33 / 2144{,}17) = 58932{,}83.$$

Ожидаемая современная стоимость взносов составляет

$${}^5P_{[55]:\overset{1}{\overline{5}|}} \cdot \ddot{a}_{[55]:\overline{5}|} = {}^5P_{[55]:\overset{1}{\overline{5}|}} \cdot \frac{N_{[55]} - N_{60}}{D_{[55]}} = {}^5P_{[55]:\overset{1}{\overline{5}|}} \cdot 7{,}753167.$$

Отсюда годовая нетто-премия равна

$$^{5}P_{[55]:\overline{5}|}^{\;1} = 58\,932{,}83 / 7{,}753167 = 7601{,}130 \text{ (руб.)}.$$

Пример. (52) заключил договор страхования жизни на срок 8 лет. Страховая сумма, равная 50 000 руб., выплачивается незамедлительно, премии выплачиваются в начале каждого года в течение всего срока страхования. Чему равна годовая нетто-премия в соответствии с табл. П.3 и П.7?

Решение. Ожидаемая современная стоимость выплат составляет

$$50\,000\,\frac{i}{\delta}A_{52:\overline{8}|}^{1} = 50\,000\,\frac{i}{\delta}\,\frac{M_{[52]} - M_{60}}{D_{[52]}} = \frac{i}{\delta}\cdot 2943{,}869 =$$

$$= 3002{,}361 \text{ (руб.)}.$$

Ожидаемая современная стоимость премий равна

$$\overline{P}_{52:\overline{8}|}^{\,1}\cdot \ddot{a}_{52:\overline{8}|} = \overline{P}_{52:\overline{8}|}^{\,1}\cdot\frac{N_{52} - N_{60}}{D_{52}} = \overline{P}_{52:\overline{8}|}^{\,1}\cdot 6{,}828801.$$

Из условия баланса, которое в данном примере имеет вид

$$50\,000\,A_{52:\overline{8}|}^{1} = 50\,000\,\frac{i}{\delta}A_{52:\overline{8}|}^{1} = \overline{P}_{52:\overline{8}|}^{\,1}\cdot \ddot{a}_{52:\overline{8}|},$$

получаем значение годовой нетто-премии:

$$\overline{P}_{52:\overline{8}|}^{\,1} = 3002{,}36 / 6{,}83 = 439{,}584 \text{ (руб.)}.$$

Пример. [50] заключил договор смешанного страхования на срок 12 лет со страховой суммой 200 000 руб., выплачиваемой в конце года. Страховые премии вносятся в начале каждого квартала в течение 12 лет. Вычислить величину квартальной нетто-премии на основе табл. П.3, П.4. Как изменится величина этой премии, если страховую сумму по случаю смерти выплачивать незамедлительно?

Решение. Сначала из табл. П.3, П.4 найдем величину $\ddot{a}_{[50]:\overline{12}|}$:

$$\ddot{a}_{[50]:\overline{12}|} = \frac{N_{[50]} - N_{62}}{D_{[50]}} = 8{,}24.$$

Затем в соответствии с (2.4.5) получаем

$$\ddot{a}^{(4)}_{[50]:\overline{12}|} = \ddot{a}_{[50]:\overline{12}|} - \frac{3}{8}\left(1 - \frac{D_{62}}{D_{[50]}}\right) = 8{,}077.$$

Поскольку таблицы П.3 и П.4 вычислены при значении нормы доходности $i = 0{,}04$, то

$$A_{[50]:\overline{12}|} = 1 - d\ddot{a}_{[50]:\overline{12}|} = 1 - \frac{1}{1+i} 8{,}24 = 0{,}683.$$

Годовое значение нетто-премии равно

$$P^{(4)}_{[50]:\overline{12}|} = 200\,000 \frac{0{,}683}{8{,}077} = 16\,912{,}22 \text{ (руб.)}.$$

Следовательно, величина квартального взноса составляет 4227,97 руб.

Если страховую сумму по смерти выплачивать незамедлительно, то уравнение баланса примет вид

$$\bar{A}_{[50]:\overline{12}|} = \bar{P}^{(4)}_{[50]:\overline{12}|} \cdot \ddot{a}_{[50]:\overline{12}|}.$$

В силу незамедлительности выплат по случаю смерти здесь появилась черта над символами единовременной нетто-премии и премии. Поскольку величина $A_{[50]:\overline{12}|}$ уже вычислена, то значение $\bar{A}_{[50]:\overline{12}|}$ будем определять так:

$$\bar{A}_{[50]:\overline{12}|} = \frac{i}{\delta}(A_{[50]:\overline{12}|} - D_{62}/D_{[50]}) + D_{62}/D_{[50]} = 0{,}686.$$

Теперь годовое значение нетто-премии равно

$$\bar{P}^{(4)}_{[50]:\overline{12}|} = 200\,000 \cdot 0{,}685451 / 8{,}07698) = 16\,972{,}95 \text{ (руб.)}.$$

Это соответствует объему квартальной нетто-премии 4243,235 руб. Таким образом, увеличение квартальной нетто-премии составило менее 15,3 руб., т.е. относительное увеличение квартального взноса составляет всего 0,36%. Столь незначительная разница между премиями объясняется малой расчетной нормой доходности и низкой интенсивностью смертности на интервале от 50 до 62 лет.

Пример. (55) заключил договор страхования пожизненной пенсии, которая выплачивается в начале каждого года начиная с 60 лет. Размер годовой пенсии составляет 48 000 руб. Годовые премии уплачиваются в начале каждого года в течение 5 лет. Требуется определить величину годовой нетто-премии на основе табл. П.3, П.4. Как изменится ее величина, если пенсию выплачивать в начале каждого месяца и если, кроме того, использовать не окончательную таблицу смертности, а отборочную?

Решение. Единовременная нетто-премия по аннуитету составляет

$$48\,000\frac{D_{60}}{D_{55}}\ddot{a}_{60}=48\,000\frac{D_{60}}{D_{55}}\frac{N_{60}}{D_{60}}=48\,000\frac{N_{60}}{D_{60}}=$$

$$=48\,000\cdot 35\,841{,}261/3664{,}57=469\,463{,}137 \text{ (руб.)}.$$

Единовременная нетто-премия по взносам равна

$$P({}_{5|}\ddot{a}_{55})\,\ddot{a}_{55:\overline{5|}}=P({}_{5|}\ddot{a}_{55})\frac{N_{55}-N_{60}}{D_{60}}=P({}_{5|}\ddot{a}_{55})\,4{,}546645.$$

Условие баланса

$$P({}_{5|}\ddot{a}_{55})\ddot{a}_{55:\overline{5|}}=48\,000\frac{D_{60}}{D_{55}}\ddot{a}_{60}$$

дает значение годовой нетто-премии:

$$P({}_{5|}\ddot{a}_{55})=103\,254{,}9 \text{ (руб.)}.$$

Если пенсия выплачивается не раз в год, а ежемесячно, то единовременная нетто-премия этой пенсии составляет

$$48\,000\frac{D_{60}}{D_{55}}(\ddot{a}_{60}-11/24)=447\,463{,}33 \text{ (руб.)}.$$

Тогда годовая нетто-премия будет равна

$$P^{(12)}({}_{5|}\ddot{a}_{55})=447\,463{,}33/4{,}546=98\,430{,}12 \text{ (руб.)}.$$

Как нетрудно видеть, уменьшение годовой премии составило 4838,73 руб., т.е. при увеличении кратности аннуитета годовая премия уменьшилась на 4,7%.

При использовании отборочной таблицы смертности фактически договор будет заключаться с [55]. В таком случае единовременная нетто-премия по аннуитету будет равна

$$48\,000\frac{D_{60}}{D_{[55]}}\ddot{a}_{60}=48\,000\frac{D_{60}}{D_{[55]}}\frac{N_{60}}{D_{60}}=48\,000\frac{N_{60}}{D_{[55]}}=$$

$$=48\,000\cdot 35\,841{,}261/3638{,}33=472\,848{,}95 \text{ (руб.)},$$

а единовременная нетто-премия по взносам —

$$P({}_{5|}\ddot{a}_{[55]})\,\ddot{a}_{[55]:\overline{5}|} = P({}_{5|}\ddot{a}_{[55]})\frac{N_{[55]}-N_{60}}{D_{[55]}} = P({}_{5|}\ddot{a}_{[55]})\cdot 4{,}57 \text{ (руб.)}.$$

Теперь размер годовой нетто-премии составит

$$P({}_{5|}\ddot{a}_{[55]}) = 472\,845{,}4 / 4{,}57 = 103\,467{,}27 \text{ (руб.)}.$$

Таким образом, использование таблицы смертности с уменьшенными показателями смертности в первые два года действия полиса увеличило годовой размер нетто-премии на 5070,1 руб., т.е. на 5% по сравнению с предыдущим уровнем годового взноса.

3.2. Регулярные брутто-премии

Как указывалось ранее, величина нетто-премий определяется условием страхового договора и обеспечивает выплаты по страховому случаю. Условие баланса, которое определяет нетто-премии, не учитывает дополнительных издержек, необходимых для работы страховой компании, в частности расходов по ведению дела конкретного страхового полиса. В число издержек включают начальные комиссионные выплаты, налоги, аренду помещений, зарплату сотрудникам, расходы по закрытию полиса и т.д. Для целей актуарной математики природа издержек не играет роли, важна лишь величина этих издержек в процессе развития страхового договора. Поэтому с издержками удобно работать точно так же, как со страховыми выплатами: рассматривая случайную величину текущей стоимости издержек, складывать ее с текущей стоимостью страховых выплат и получать таким образом случайную величину убытка с учетом этих издержек. Далее ожидаемая современная стоимость издержек в сумме с ожидаемой современной стоимостью страховых выплат должна приравниваться к ожидаемой современной стоимости премий. Из полученного равенства определяется величина брутто-премии, которая учитывает все выплаты страховщика, связанные с данным полисом.

Пример. Для погашения образовательного кредита (18) планирует заключить договор страхования дожития на срок 3 года со страховой суммой 200 000 руб. Премии по договору вносятся в начале каждого года в течение трех лет. Издержки составляют 20% от первой премии и 5% от каждой из последующих. Чему равна величина годового взноса, если пользоваться табл. П.1 и принять расчетную норму доходности 0,06? Имеет ли смысл заключать такой договор?

Решение. В данных предположениях величины

$$v = 1/1{,}06 = 0{,}943396,\ p_{18} = l_{19}/l_{18} = 0{,}99888.$$

Ожидаемая современная стоимость страховых выплат равна

$$200\,000\,A_{x:\overset{1}{n|}} = 200\,000\,v^3\,{}_3p_{18} = 200\,000 \cdot 0{,}836\,696 = 167\,339{,}3 \text{ (руб.)}.$$

Ожидаемая современная стоимость издержек составляет

$$0{,}15G + 0{,}05G\,\ddot{a}_{18:\overline{3}|} = G(0{,}15 + 0{,}05\,\ddot{a}_{18:\overline{3}|}) =$$

$$= G(0{,}15 + 0{,}05\,(1 + v\,p_{18} + v^2\,{}_2p_{18}) =$$

$$= G\,(0{,}15 + 0{,}05 \cdot 2{,}8303) = 0{,}2915G.$$

Ожидаемая современная стоимость премий выражается через G как

$$G(1 + v\,p_{18} + v^2\,{}_2p_{18}) = 2{,}8303G.$$

Условие баланса для определения годовой брутто-премии имеет вид

$$167\,339{,}3 + 0{,}2915G = 2{,}8303G.$$

Из этого условия получаем брутто-премию

$$G = 167\,339{,}3\,/\,(2{,}8303 - 0{,}2915) = 65\,913{,}15 \text{ (руб.)}.$$

В данных предположениях величина премии оказалась слишком большой для того, чтобы сделать договор привлекательным. Если не принимать во внимание низкий уровень смертности на возрастном интервале от 18 лет до 21 года, то текущая стоимость будущих 200 000 руб. равна $200\,000\,v^3 = 167\,923{,}9$ руб., а текущая стоимость взносов больше этой величины: она составляет $65\,913{,}15(1 + v + v^2) = 186\,757{,}8$ руб. Основная причина непривлекательности данного договора состоит в его малом, т.е. три года, сроке действия, в течение которого эффект инвестиций и смертности не успевает проявиться.

В рассмотренном примере следует обратить внимание на то, что величина 20% от первой премии при вычислении текущей стоимости издержек разбивается на сумму 15 и 5% от нее для удобства вычисления величины авансового аннуитета величины G.

Пример. [50] заключает договор, согласно которому по достижении возраста 60 лет он будет получать пенсию в начале каждого года. Размер первой годовой пенсии составляет 150 000 руб., начальные издержки по договору составляют 40% от единовременной премии. Текущие издержки на начало каждого года действия полиса составляют 1200 руб. плюс 3% от каждой годовой пенсии в момент выплаты. Чему равна единовременная премия по данному договору согласно табл. П.3, П.4?

Решение. Ожидаемая современная стоимость страховых выплат равна

$$150\,000 \cdot {}_{10}E_{[50]} \cdot \ddot{a}_{60} = 150\,000 \frac{D_{60}}{D_{[50]}} \frac{N_{60}}{D_{60}} =$$

$$= 150\,000 \frac{N_{60}}{D_{[50]}} = 1\,173\,501{,}6 \text{ (руб.)}.$$

Ожидаемая современная стоимость издержек составляет

$$(0{,}4G - 1200) + 1200\,\ddot{a}_{[50]} + 0{,}03 \cdot 150\,000\,{}_{10}E_{[50]} \cdot \ddot{a}_{60} =$$

$$= (0{,}4G - 1200) + 1200 \frac{N_{[50]}}{D_{[50]}} + 4500 \frac{N_{60}}{D_{[50]}} =$$

$$= (0{,}4G - 1200) + 19\,263{,}82 + 35\,205{,}05.$$

Условие баланса в данном случае имеет вид

$$G = 1\,173\,501{,}6 + (0{,}4G - 1200) + 19\,263{,}82 + 35\,205{,}05,$$

из полученного уравнения величина единовременной премии G равна 2 044 617 руб.

Следует отметить, что при найденном значении единовременной брутто-премии G ожидаемая современная стоимость издержек составляет 871 115,8 руб. Это означает, что единовременная нетто-премия в данном примере составляет 2 044 617 – 871 115 = 1 173 502 руб., т.е. 57% от всей брутто-премии. Остальные 43% брутто-премии покрывают издержки.

Пример. [56] заключил договор по бессрочному страхованию жизни со страховой суммой 100 000 руб., выплачиваемой незамедлительно. По договору уплата взносов производится в начале каждого квартала в течение пяти лет. Начальные издержки равны величине квартального взноса, текущие издержки возникают в момент уплаты взноса и равны 5% от его величины. Издержки по закрытию полиса составляют 2% от страховой суммы. Требуется определить величину квартального взноса исходя из данных табл. П.3, П.4, П.7.

Решение. Единовременная нетто-премия по договору равна

$$100\,000\,\bar{A}_{[56]} = 100\,000\,\frac{1}{\delta}A_{[56]} = 100\,000\,\frac{0{,}04}{\ln 1{,}04}\,\frac{M_{[56]}}{D_{[56]}} =$$
$$= 46\,747{,}37 \text{ (руб.)}.$$

Пусть G — размер годового взноса, тогда единовременная нетто-премия годовых взносов составляет

$$G\,\ddot{a}_{[56]:\overline{5}|} = G\,\frac{N_{[56]} - N_{61}}{D_{[56]}} = 4{,}563072G.$$

Единовременная нетто-премия квартальных взносов составляет

$$G\ddot{a}^{(4)}_{[56]:\overline{5}|} = (4{,}563072 - 3/8\,(1 - {}_5E_{[56]}))\,G = 4{,}480936G.$$

Ожидаемая современная стоимость издержек равна

$$0{,}2G + 0{,}05G\,\ddot{a}^{(4)}_{[56]:\overline{5}|} + 0{,}02 \cdot 100\,000\,\bar{A}_{[56]} =$$
$$= (0{,}2 + 0{,}05\,\ddot{a}^{(4)}_{[56]:\overline{5}|})\,G + 0{,}02 \cdot 100\,000\,\bar{A}_{[56]} =$$
$$= 0{,}424047G + 934{,}95.$$

Условие баланса в данном примере дает уравнение относительно G:

$$46\,747{,}37 + 0{,}424047G + 934{,}95 = 4{,}480936G.$$

Решением данного уравнения является значение $G = 11\,753{,}42$ (руб.). Отсюда величина квартального взноса составляет 2938,36 руб.

Здесь следует отметить, что величина брутто-премии разделяется на две составляющие: первая — 2608,13 руб. — соответствует квартальной нетто-премии, вторая — 330,29 руб. — является квартальной надбавкой для покрытия издержек. При этом вторая составляющая равна 11,24% от всей премии.

Пример. Страхователь точного возраста 52 года приобрел полис смешанного страхования жизни, выплаты по смерти в конце года смерти, срок действия полиса 12 лет, авансовые взносы выплачиваются ежегодно в течение 12 лет, уменьшаясь каждый год на 5%. Начальные издержки составляют 15% от страховой суммы, равной 200 000 руб., и 53% от первого взноса, текущие издержки — 3% от всех последующих взносов. Исходя из селективных табл. П.3–П.5 требуется определить величину первого взноса.

Решение. Величина взноса равна

$$G(1 - 0{,}05(k-1)) = 1{,}05G - 0{,}05G(1+k)$$

на k-м году действия полиса, $k=1,2,\dots,12$. Их единовременная нетто-премия составляет

$$1{,}05G\,\ddot{a}_{[52]:\overline{12}|}-0{,}05G\,(I\ddot{a})_{[52]:\overline{12}|}=$$

$$=1{,}05G\frac{N_{[52]}-N_{64}}{D_{[64]}}-0{,}05G\frac{S_{[52]}-S_{64}-12N_{64}}{D_{[52]}}=$$

$$=1{,}05\cdot 9{,}371G-0{,}05\cdot 55{,}403G=1{,}05G-2{,}77015G=11{,}2863G.$$

Единовременная нетто-премия страховых выплат составляет

$$200\,000\,A_{[52]:\overline{12}|}=200\,000\frac{M_{[52]}-M_{64}+D_{64}}{D_{[52]}}=$$

$$=200\,000\cdot 0{,}639578=127\,916\ (\text{руб.}).$$

Начальные издержки равны

$$0{,}15\cdot 200\,000+0{,}5G+0{,}03G.$$

Величина $0{,}53G$ разбита на два слагаемых для более краткой записи выражения ожидаемой современной стоимости всех издержек. Текущие издержки составляют на k-м году действия полиса величину

$$0{,}03\,(1{,}05G-0{,}05G(1+k)).$$

Теперь ожидаемая современная стоимость издержек равна

$$0{,}15\cdot 200\,000+0{,}5G+0{,}03\,(1{,}05G-0{,}05G(1+k))=$$

$$=30\,000+0{,}5G+0{,}03\cdot 11{,}2863G.$$

Условие баланса выплат и взносов дает уравнение

$$121\,452+30\,000+0{,}5G+0{,}03\cdot 11{,}2863G=11{,}2863G,$$

откуда величина первого взноса G равна

$$G=\frac{121\,452+30\,000}{0{,}97\cdot 11{,}2863-0{,}5}=14\,496{,}2\ (\text{руб.}).$$

Глава 4. РЕЗЕРВЫ. БАЗИСЫ РАСЧЕТА

Случайная величина текущего убытка была введена для вычисления нетто- и брутто-премий в различных случаях страховых договоров, связанных со страхованием жизни. При этом всегда рассматривались понятия современной стоимости, а также ожидаемой современной стоимости страховых выплат, страховых премий, издержек, соответствующие стоимости приводились к моменту заключения страхового договора. Вычисленные на момент покупки полиса значения премий применялись в процессе действия полиса в соответствии с его условиями. Полисы, связанные со страхованием жизни, являются долгосрочными, поэтому для страховой компании необходимо иметь как оценку своих будущих обязательств перед страхователем на любой момент периода действия полиса, так и оценку обязательств страхователя в течение всего периода действия полиса. Осредненной характеристикой величины убытка, отнесенной к будущему моменту, является резерв. Как правило, под резервом понимается проспективный резерв, равный разности между ожидаемой современной стоимостью будущих выплат страховой компании, отнесенных к некоторому моменту в будущем, и ожидаемой современной стоимостью премий, которые будут получены после указанного момента. Таким образом, проспективный резерв — это математическое ожидание случайной величины, которая называется случайной величиной будущего убытка, отнесенного к $k+1$-му году действия полиса, и обозначается ${}_kL$, где левый нижний индекс указывает на то, что данная случайная величина рассматривается на момент, непосредственно предшествующий моменту внесения премии в начале $k+1$-го года работы полиса. Например, в случае бессрочного страхования жизни со страховой суммой S, пожизненной уплатой взносов P_k в начале $k+1$-го года и при величине издержек e_k, возникающих в момент уплаты взносов, случайной величиной будущего убытка, отнесенного к началу $k+1$-го года действия полиса, т.е. к возрасту $x+k$, называется выражение

$$_kL = v^{K(x+k)+1} + \sum_{j=0}^{K(x+k)} v^j \cdot e_j - \sum_{j=0}^{K(x+k)} v^j \cdot P_j.$$

В этом случае резервом на начало $k+1$-го года действия полиса является математическое ожидание случайной величины $_kL$:

$$_kV = E(_kL) = A_{x+k} + E\left(\sum_{j=0}^{K(x+k)} v^j \cdot e_j\right) - E\left(\sum_{j=0}^{K(x+k)} v^j \cdot P_j\right).$$

При рассмотрении резерва, так же как и случайной величины будущего убытка, предполагается дожитие застрахованного до возраста $x+k$.

Величина резерва определяется после вычисления премий. Поэтому при вычислении резерва вовсе не обязательно использовать те же актуарные предположения, что и при вычислении премий. Напротив, как правило, при расчетах резервов делаются более консервативные предположения, чем в случае премии. Это связано с тем, что величина резерва говорит о необходимых средствах компании, выделяемых для покрытия будущих выплат, в том числе и издержек после фиксированного момента времени. При вычислении резерва трудно судить о реальном будущем уровне нормы доходности, о поведении страхователя, который может прекратить выплату взносов или отказаться от страхового договора. Ввиду всех этих обстоятельств резерв необходимо вычислять с большей осторожностью, чем премии. Таким образом, при расчете резервов как будущих обязательств необходимо уточнять предположения относительно смертности, величины нормы доходности. Набор предположений называется расчетным базисом. Если речь идет о вычислении премий, то говорится о премиальном базисе, если же речь идет о резервах, то указывается базис расчета резервов.

4.1. Брутто-резервы

При вычислении брутто-резервов, или просто резервов, учитываются не только страховые выплаты, указанные в страховом полисе, но и все дополнительные издержки, связанные с организацией и ведением мероприятий, имеющих отношение к интересующему нас страховому полису. Брутто-резерв на начало $k+1$-го страхового года по данному полису определяется как разность между ожидаемой на этот момент стоимостью всех выплат и аналогичной стоимостью взносов, которые предстоит внести начиная с данного момента. Например, для полиса смешанного страхования на срок

n лет с единичной страховой суммой брутто-резерва обозначается через ${}_kV_{x:\overline{n}|}$ и определяется как

$$ {}_kV_{x:\overline{n}|} = A_{x+k:\overline{n-k}|} - G \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}, \tag{4.1.1}$$

где G — вычисленная на премиальном базисе брутто-премия по данному договору, а $A_{x+k:\overline{n-k}|}$ и $\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$ — единовременные нетто-премии, вычисленные на резервном базисе. Система обозначений для резервов такая же, как и у регулярных премий, единственное различие состоит в том, что у резерва левый нижний индекс указывает момент времени, для которого определяется данный резерв. Для расчета резервов часто бывает полезно применять рекуррентные формулы, которые следуют из соответствующих формул для единовременных премий выплат и премий. В частности, для случая смешанного страхования из (4.1.1) для $k<n$ имеем

$$ {}_kV_{x:\overline{n}|} = v q_{x+k} - G + \sum_{j=0}^{n-k-1} v^{j+1} \frac{d_{x+k+j}}{l_{x+k}} - G \sum_{j=0}^{n-k-1} v^{j} \frac{l_{x+k+j}}{l_{x+k}} =$$

$$= v q_{x+k} - G + v \frac{l_{x+k+1}}{l_{x+k}} \sum_{j=0}^{n-k-1} \left(v^{j-1+1} \frac{d_{x+k+1+j-1}}{l_{x+k+1}} - G v^{j-1} \frac{l_{x+k+1+j-1}}{l_{x+k+1}} \right).$$

Обозначая в правой части последнего выражения $j-1$ через j, получим

$$ {}_kV_{x:\overline{n}|} = v q_{x+k} - G + v \frac{l_{x+k+1}}{l_{x+k}} \sum_{j=0}^{n-k-2} \left(v^{j+1} \frac{d_{x+k+1+j}}{l_{x+k+1}} - G v^{j} \frac{l_{x+k+1+j}}{l_{x+k+1}} \right),$$

откуда

$$ {}_kV_{x:\overline{n}|} = v q_{x+k} - G + v p_{x+k} \cdot {}_{k+1}V_{x:\overline{n}|}. \tag{4.1.2}$$

Аналогично получаются рекуррентные соотношения для резервов в других видах страхования. Для этого в выражениях единовременных нетто-премий, входящих в запись резерва, выделяется первое слагаемое и преобразуется вынесением произведения $v p_{x+k}$ за знак суммы второго слагаемого.

Пример. Требуется вычислить величину резерва непосредственно перед внесением седьмой годовой премии для смешанного страхования жизни на срок 12 лет, возраст страхователя 53 года, страховая сумма 100 000 руб. Выплаты по случаю смерти в конце страхового года, авансовые премии вносятся в течение 12 лет. Премии определяются исходя из селективной табл. П.9, резервы — из окончательных табл. П.3, П.7.

Решение. Сначала вычислим годовую премию G из условия баланса:

$$100\,000 A_{53:\overline{12}|} = G \ddot{a}_{53:\overline{12}|},$$

из табл. П.9 находим значение $A_{53:\overline{12}|} = 0{,}5777$, $\ddot{a}_{53:\overline{12}|} = 8{,}867$, откуда величина годового взноса $G = 6515{,}958$ руб. Далее для расчета искомого резерва $100\,000 \cdot {}_6V_{53:\overline{12}|}$ воспользуемся коммутационными числами табл. П.3 и П.7:

$$A_{59:\overline{6}|} = \frac{M_{59} - M_{65} + D_{65}}{D_{59}} =$$

$$= (1514{,}6775 - 1258{,}7316 + 2144{,}1713)\,/\,3008{,}9150 = 0{,}7977,$$

$$\ddot{a}_{59:\overline{6}|} = \frac{N_{59} - N_{65}}{D_{59}} = (38\,850{,}176 - 23\,021{,}434)\,/\,3008{,}9150 = 5{,}260615.$$

Отсюда резерв с учетом страховой суммы равен

$$100\,000 \cdot {}_6V_{53:\overline{12}|} = 100\,000 \cdot 0{,}7538 - 6515{,}958 \cdot 5{,}260615 =$$
$$= 41\,102{,}05 \text{ (руб.)}.$$

Следует отметить, что если расчет премий и резервов основан на одном базисе, то из условия баланса расчета премий вытекает равенство ${}_0V = 0$. В общем случае это не так: в данном примере

$${}_0V = \frac{M_{53} - M_{65} + D_{65}}{D_{53}} - 0{,}064653 \frac{N_{53} - N_{65}}{D_{53}} = 0{,}04253.$$

С учетом величины страховой суммы начальный резерв равен

$$100\,000 \cdot 0{,}04253 = 4253 \text{ (руб.)}.$$

Положительность резерва на начало страхового договора объясняется разницей в актуарных расчетных базисах: резервы вычисляются при более низкой норме доходности и более высоких показателях смертности. Несмотря на положительность начального резерва, его значение в данном примере не превосходит 1% от страховой суммы и 3% от годового взноса.

Вид договора страхования определяет структуру изменения резерва с течением времени.

Пример. [56] заключил договор страхования дожития до возраста 65 лет со страховой суммой 250 000 руб. Авансовые годовые премии вносятся в течение пяти лет. Начальные издержки составляют 40%, а текущие — 3% от премии. Требуется вычислить значения резерва на начало пятого и шестого года действия полиса. Премия определяется по табл. П.2, П.9 при норме доходности $i=0{,}05$, базис расчета резервов — по табл. П.3, П.7 при норме доходности $i=0{,}04$.

Решение. Брутто-премия находится из условия баланса

$$250\,000 \cdot A_{[56]:\overline{9|}}^{\;\;1} + 0{,}37G + 0{,}03G\,\ddot{a}_{[56]]:\overline{9|}} = G\,\ddot{a}_{[56]:\overline{9|}}.$$

В левой части значение $A_{[56]:\overline{9|}}^{\;\;1}$ в соответствии с данными табл. П.2 равно

$$A_{[56]:\overline{9|}}^{\;\;1} = (1{,}05)^{-9}\frac{l_{65}}{l_{[56]}} =$$

$$= 0{,}644608916 \cdot (27\,442{,}681 / 31\,158{,}931) = 0{,}568.$$

Следовательно, ожидаемая современная стоимость выплат составляет $250\,000 \cdot 0{,}568 = 141\,931{,}99$ (руб.). В правой части $\ddot{a}_{[56]:\overline{9|}} = 7{,}185$ по табл П.9. Отсюда брутто-премия

$$G = 141\,931{,}99 / (0{,}97 \cdot 7{,}185 - 0{,}37) = 21\,506{,}64.$$

Далее, на начало пятого года резерв равен

$${}_4V = 250\,000\,A_{60:\overline{5|}}^{\;\;1} + 0{,}03G\,\ddot{a}_{60:\overline{1|}} - G\,\ddot{a}_{60:\overline{1|}} =$$

$$= 250\,000\,A_{60:\overline{5|}}^{\;\;1} - 0{,}97G = 250\,000\frac{D_{65}}{D_{60}} - 0{,}97G =$$

$$= 250\,000 \cdot 0{,}751 - 0{,}97G = 187\,716{,}7 - 0{,}97G = 166\,855{,}3 \text{ (руб.)}.$$

Значение резерва на начало шестого года составляет

$${}_5V = 250\,000\,A_{61:\overline{4|}}^{\;\;1} = 250\,000\frac{D_{65}}{D_{61}} = 198\,084{,}2 \text{ (руб.)}.$$

Пример. Договор страхования жизни на срок 15 лет со страховой суммой 100 000 руб. заключен с [50]. Выплаты по смерти производятся незамедлительно, авансовые премии вносятся поквартально в течение 15 лет. Определить резерв на начало девятого года действия полиса. Премия вычисляется на основе табл. П.2, П.9 при норме доходности $i=0{,}05$, резервы – согласно табл. П.2—П.4, П.7 с нормой доходности $i=0{,}04$.

Решение. Прежде всего необходимо заметить, что базисы расчетов премий и резервов не совпадают, поэтому здесь речь идет не о нетто-, а о брутто-премии. Брутто-премия определяется из равенства — условия баланса

$$100\,000\,\overline{A}^{\,1}_{[50]:\overline{15}|} = G\,\ddot{a}^{(4)}_{[50]:\overline{15}|},$$

где $\ddot{a}_{[50]:\overline{15}|} = 10{,}412$ (см. табл. П.9), а значение $\overline{A}^{\,1}_{[50]:\overline{15}|}$ определяется из табл. П.2, П.9 и составляет

$$A^{\,1}_{[50]:\overline{15}|} = A_{[50]:\overline{15}|} - \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{15} \frac{l_{65}}{l_{[50]}} =$$

$$= 0{,}50417 - \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{15} \frac{27\,442{,}681}{32\,558{,}008} = 0{,}09(\text{руб.}).$$

Таким образом,

$$\ddot{a}^{(4)}_{[50]:\overline{15}|} = 10{,}412 - \frac{3}{8}\left(1 - \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{15} \frac{27\,442{,}681}{32\,558{,}008}\right) =$$

$$= 10{,}412 - 0{,}222959 = 10{,}19 \text{ (руб.)},$$

$$\overline{A}^{\,1}_{[50]:\overline{15}|} = \frac{0{,}05}{\ln 1{,}05} 0{,}092071 = 0{,}10 \text{ (руб.)},$$

откуда величина годовой брутто-премии равна

$$G = 100\,000\,(0{,}101176 / 10{,}18904) = 992{,}99 \text{ (руб.)}.$$

Искомое значение резерва

$${}_8V = 100\,000\,\overline{A}^{\,1}_{58:\overline{7}|} - G\,\ddot{a}^{(4)}_{58:\overline{7}|} = 100\,000\,\frac{0{,}04}{\ln 1{,}04} A^{\,1}_{58:\overline{7}|} - G\,\ddot{a}^{(4)}_{58:\overline{7}|}.$$

Здесь согласно табл. П.3 и П.7

$$100\,000\,A^{\,1}_{58:\overline{7}|} = 100\,000\left(\frac{M_{58} - M_{65}}{D_{58}}\right) =$$

$$= 100\,000\,(1550{,}2544 - 1258{,}7316) / 3166{,}2716 = 9207{,}132,$$

$$100\,000\,\overline{A}^{\,1}_{58:\overline{7}|} = 100\,000\,\frac{0{,}04}{\ln(1{,}04)} A^{\,1}_{58:\overline{7}|} = 9390{,}071,$$

аналогично из П.3 и П.4 получаем

$$\ddot{a}_{58:\overline{7}|} = \frac{N_{58} - N_{65}}{D_{58}} = 5{,}999,$$

$$\ddot{a}^{(4)}_{58:\overline{7}|} = 5{,}999174 - \frac{3}{8}\left(1 - \frac{2012{,}1584}{3166{,}2716}\right) = 5{,}86.$$

Искомое значение резерва равно

$${}_8V = 9390{,}071 - 992{,}985 \cdot 5{,}862 = 3568{,}71 \text{ (руб.)}.$$

Для трех основных типов страхования рассмотрим характер изменения величины резерва с течением времени. В приведенном ниже примере для долгосрочного страхования характер этого изменения прослеживается.

Пример. Построить диаграммы изменения величины резерва в зависимости от времени для трех типов договоров: страхования дожития, страхования жизни и смешанного страхования на срок 20 лет для страхователя возраста 52 лет. Страховая сумма во всех случаях равна 100 000 руб., авансовые годовые премии вносятся в течение всего срока страхования, выплата по смерти производится в конце года смерти, расчет премий и резервов основан на табл. П.3, П.4 и П.7.

Решение. Для данного примера вычисляемая премия является годовой нетто-премией. Условие баланса для случая страхования дожития (G_a), страхования жизни (G_d) и смешанного страхования (G_e) соответственно имеет вид

$$100\,000\,A_{52:\overset{1}{\overline{20}|}} = G_a\,\ddot{a}_{52:\overline{20}|},$$

$$100\,000\,A^{1}_{52:\overline{20}|} = G_d\,\ddot{a}_{52:\overline{20}|},$$

$$100\,000\,A_{52:\overline{20}|} = G_e\,\ddot{a}_{52:\overline{20}|},$$

откуда значения премий согласно табл. П.3, П.4 и П.7 равны

$$G_a = 100\,000\frac{D_{72}}{N_{52}-N_{72}} = 2392{,}79 \text{ (руб.)},$$

$$G_d = 100\,000\frac{M_{52}-M_{72}}{N_{52}-N_{72}} = 1566{,}26 \text{ (руб.)},$$

$$G_e = 100\,000\frac{M_{52}-M_{72}+D_{72}}{N_{52}-N_{72}} = 3959{,}06 \text{ (руб.)}.$$

После определения годовых премий соответствующие резервы определяются как

$${}_kV_{52:\overset{1}{\overline{20}|}} = 100\,000\,A_{52+k:\overset{1}{\overline{20-k}|}} - G_a\,\ddot{a}_{52+k:\overline{20-k}|} =$$

$$= \frac{100\,000\,D_{72}}{D_{52+k}} - G_a\frac{N_{52+k}-N_{72}}{D_{52+k}},$$

$${}_kV^{1}_{52:\overline{20}|} = 100\,000\frac{M_{52+k}-M_{72}}{D_{52+k}} - G_d\frac{N_{52+k}-N_{72}}{D_{52+k}},$$

$$ {}_kV_{52:\overline{20}|} = 100\,000\frac{M_{52+k}-M_{72}+D_{72}}{D_{52+k}} - G_e\frac{N_{52+k}-N_{72}}{D_{52+k}} = {}_kV_{52:\overset{1}{\overline{20}|}} + {}_kV^{1}_{52:\overline{20}|}. $$

Используя данные для коммутационных чисел в табл. П.3, П.4 и П.7 для каждого $k=1,2,3,\ldots,20$, получаем требуемые диаграммы (рис. 2–4).

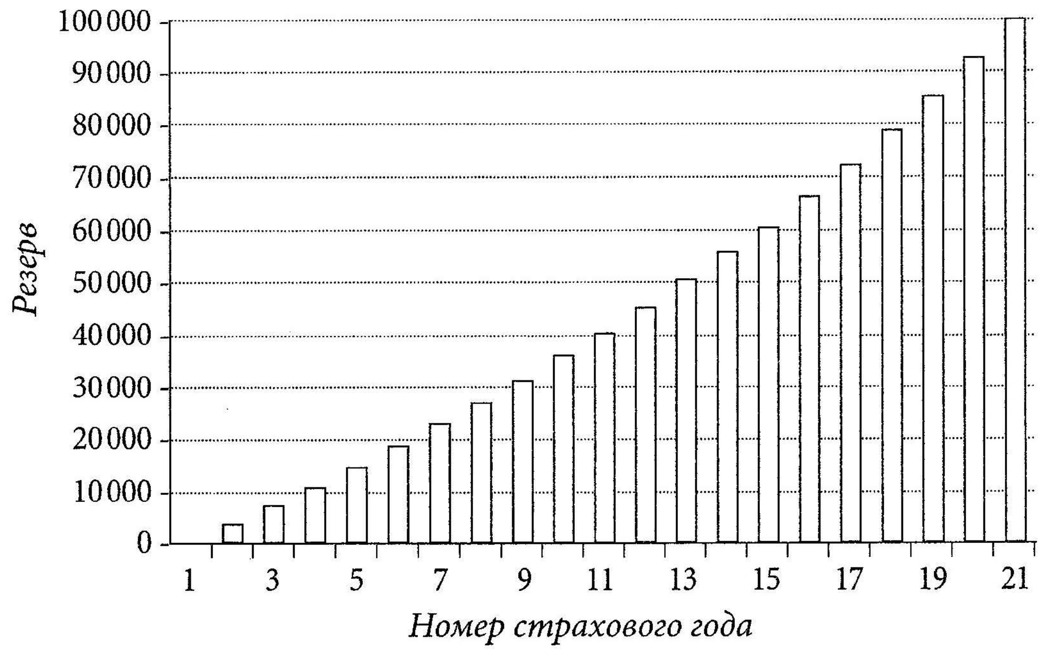

Рис. 2. Изменение величины резерва для страхования дожития

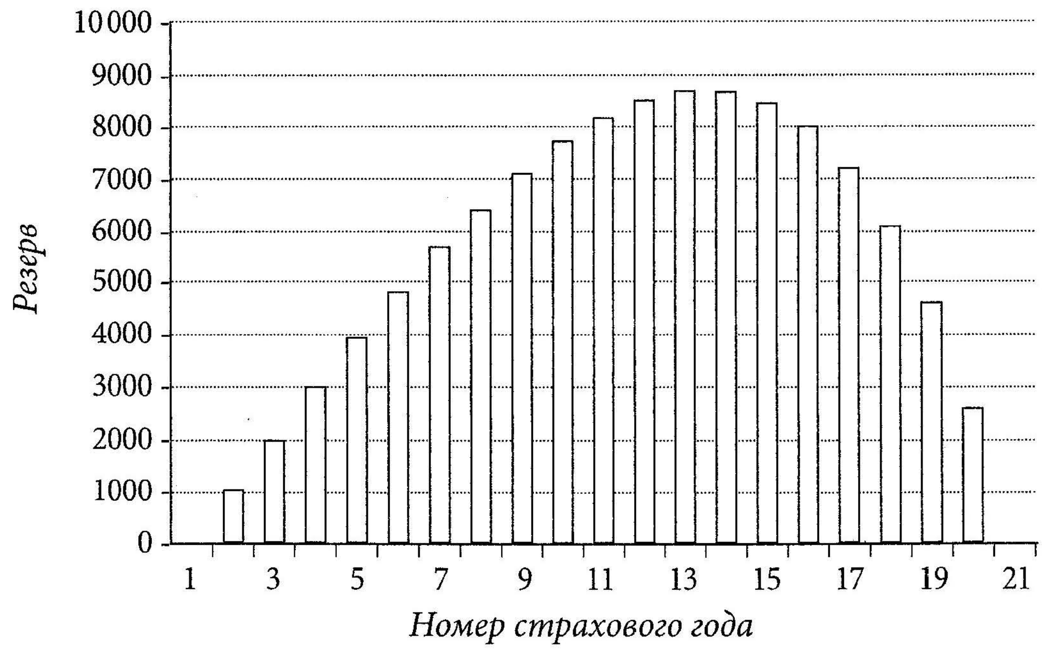

Рис. 3. Изменение величины резерва для страхования жизни

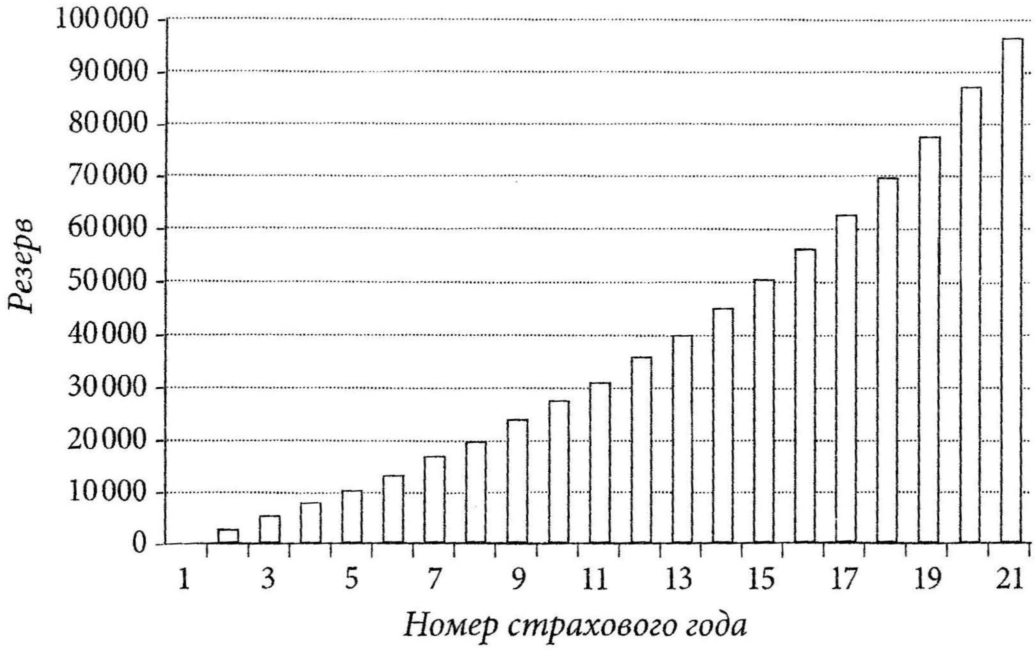

Рис. 4. Изменение величины резерва для смешанного страхования

Диаграммы, полученные для трех данных типов страхования, показывают, что в страховании дожития величина резерва неуклонно увеличивается, причем увеличение для последних лет страхования сверхлинейное. В случае страхования жизни сначала происходит увеличение резерва, при этом он достигает максимума при прохождении 2/3 срока действия полиса, а затем неуклонно уменьшается. Образно это можно выразить так: в течение 2/3 срока страхования жизни возрастает «ожидание» страхового случая, затем оно ослабевает. Для случая смешанного страхования имеет место монотонное, практически линейное увеличение резерва. Здесь происходит, с одной стороны, возрастание ожидания страхового случая по дожитию, а с другой — угасание ожидания страховой выплаты по случаю смерти после 2/3 срока действия полиса. Эти противоположные тенденции нивелируют изменение резерва.

4.2. Нетто-резервы

Если вычисление резервов допускает возможность не учитывать издержки, при этом базис расчета основан на тех же актуарных предположениях, что и расчет премий, то эти резервы называются нетто-резервами. Из определения нетто-резерва следует, что на практике их вычисление производится для грубой оценки будущих обязательств компании по какому-либо полису или для выяснения тенденций изменения страховых выплат, например, в ситуации демографических изменений. Применение нетто-резервов основано на простых формулах, позволяющих сократить вычисления. В частности, для таких резервов всегда выполняется равенство ${}_0V=0$. Рассмотрим наиболее типичный случай смешанного страхования на срок n лет. Здесь годовая нетто-премия из условия баланса равна

$$P=\frac{A_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}.$$

Воспользовавшись соотношением (2.3.3), выразим нетто-премию через единовременную нетто-премию по срочному аннуитету, тогда

$$P=\frac{A_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}=\frac{1-d\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}},$$

откуда величина резерва при единичной страховой суме равна

$${}_kV_{x:\overline{n|}}=A_{x+k:\overline{n-k|}}-\frac{1-d\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k|}}=$$

$$=1-d\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k|}}-\frac{1-d\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k|}}=\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}-\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}.$$

Следовательно,

$${}_kV_{x:\overline{n|}}=1-\frac{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}. \tag{4.2.1}$$

Увеличивая в (4.2.1) срок страхования n, в пределе имеем

$${}_kV_x=1-\frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x}. \tag{4.2.2}$$

Пример. Для полиса бессрочного страхования жизни с единичной страховой суммой взносы поступают в начале каждого года, выплата по смерти производится в конце года смерти. Известно, что $\ddot{a}_{65}=10{,}27$, ${}_5V_{60}=0{,}2$. Чему равна величина $\ddot{a}_{60}$?

Решение. Из равенства (4.2.2) получаем уравнение

$${}_5V_{60}=0{,}2=1-10{,}27/\ddot{a}_{60},$$

из которого находим значение $\ddot{a}_{60}=12{,}838$.

Пример. При вычислении нетто-резерва известно, что

$$A_{x+n}=k_1A_x,\ {}_nV_x=k_2\frac{P_x\cdot A_x}{d}$$

для некоторых $k_1, k_2 \in R$. Требуется выразить величины $\ddot{a}_x$, A_{x+n} и ${}_nV_x$ через k_1, k_2, i.

Решение. Из равенства (4.2.2) и разложения $1 = A_{x+n} + d\,\ddot{a}_{x+n}$ следует, что

$$ {}_nV_x = k_1 A_x - \frac{P_x(1-k_1 A_x)}{d} = k_1 A_x\left(1+\frac{P_x}{d}\right) - \frac{P_x}{d} = k_2\frac{P_x}{d}A_x. $$

Выражая из полученного равенства A_x, имеем

$$ A_x = P_x \cdot \ddot{a}_x = \frac{P_x/d}{k_1 + (P_x/d)(k_1-k_2)}. $$

Отсюда $\ddot{a}_x = \dfrac{1}{dk_1 + P_x(k_1-k_2)}$. Далее,

$$ \ddot{a}_x = \frac{1}{dk_1 + (k_1-k_2)(1-d\ddot{a}_x)/\ddot{a}_x} = \frac{\ddot{a}_x}{dk_1\ddot{a}_x + (k_1-k_2)(1-d\ddot{a}_x)}. $$

Выразим величину $\ddot{a}_x$:

$$ \ddot{a}_x = \frac{1+k_2-k_1}{dk_2} = \frac{(1+i)(1+k_2-k_1)}{ik_2}. $$

По условию примера

$$ A_{x+n} = (1-d\ddot{a}_x)k_1 = k_1 - dk_1\frac{1+k_2-k_1}{dk_2} = k_1(k_1-1)/k_2. $$

Следовательно,

$$ {}_nV = k_2\frac{A_x}{d}\,\frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{k_2A_x^2}{1-A_x} = \frac{k_2(1-d(1+k_2-k_1)/dk_2)^2}{(1+k_2-k_1)/k_2} = \frac{(k_1-1)^2}{1+k_2-k_1}. $$

Пример. (55) купил полис смешанного страхования на срок два года со страховой суммой 100 000 руб. Выплата по смерти в конце года, годовые авансовые премии и резервы вычисляются при норме доходности $i = 0{,}05$. Нетто-резерв на начало второго года равен 40 000 руб. Чему равно значение q_{55}?

Решение. Из рекуррентного соотношения (4.1.2) следует, что

$$ {}_0V_{55:\overline{2}|} = 0 = \frac{100\,000}{1{,}05}q_{55} - G + \frac{1}{1{,}05}\,{}_1V_{55:\overline{2}|}, $$

откуда

$$ 0 = \frac{100\,000}{1{,}05}q_{55} - G + \frac{1}{1{,}05}40\,000\,p_{55}. $$

Это означает, что годовая нетто-премия равна

$$G = \frac{1}{1{,}05}(100\,000 q_{55} + 40\,000 p_{55}).$$

Кроме того, поскольку ${}_2V_{55:\overline{2}|} = 100\,000$, то из (4.1.2) имеем

$$40\,000 = v q_{56} \cdot 100\,000 + v p_{56} \cdot 100\,000 - G = 100\,000 \frac{1}{1{,}05} - G.$$

Из выражения для G получаем уравнение относительно q_{55}:

$$40\,000 = \frac{100\,000}{1{,}05} - \frac{1}{1{,}05}(100\,000 q_{55} + 40\,000 p_{55}).$$

Решая его, находим $q_{55} = 0{,}3$.

Пример. Чему равен нетто-резерв для договора пожизненного страхования, если распределение случайной величины $K(x)$ задается как

$${}_{k|}q_x = a \cdot b^{k+1},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Решение. Нетрудно видеть, что распределение $K(x)$ не зависит от x. Кроме того, единовременная нетто-премия составляет

$$A_{x+k} = \sum_{j=0}^{\infty} v^{j+1} \cdot a \cdot b^{j+1} = \frac{ab}{1 - vb}$$

независимо от x и k. Следовательно, нетто-резерв равен

$${}_kV = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} = 0 \text{ при всех } k.$$

4.3. Прибыль от смертности

Договоры, связанные со страхованием жизни, как правило, являются долгосрочными. Это обстоятельство обусловливает необходимость учитывать, как и в какой мере влияет на финансовое состояние страховой компании повышение или понижение реального уровня смертности по сравнению с расчетным средним показателем. Если для конца $k+1$-го года действия полиса размер выплаты по смерти равен b_{k+1}, то разность $b_{k+1} - {}_{k+1}V$ называется суммой под риском смерти. Если имеется N одинаковых полисов, то произведение

$$N q_{k+k}(b_{k+1} - {}_{k+1}V)$$

именуется ожидаемым напряжением смертности на $k+1$-м году. Если в течение $k+1$-го года наблюдалось n_d смертей, то

$$n_d(b_{k+1} - {}_{k+1}V) —$$

реальное напряжение смертности. Прибылью от смертности называется разность между ожидаемым и реальным напряжением смертности, т.е. разность

$$(b_{k+1} - {}_{k+1}V)(N\,q_{k+1} - n_d).$$

Пример. В начале 1996 г. страховая компания продала полисы по страхованию жизни на срок 20 лет страхователям возраста 50 лет. Премии выплачиваются в начале года, выплаты по страховому случаю — в конце года смерти. На 1 января 2005 г. общая страховая сумма была равна 850 000 руб., в конце 2004 г. выплаты по случаю смерти составили 10 000 руб., других причин по прекращению действия указанных полисов в 2004 г. не было. Тарифный базис совпадает с базисом резервирования и основан на табл. П.3, П.4 и П.7, норма доходности 4%, издержки не учитываются, смертность соответствует селективной табл. П.2. Чему равна прибыль от смертности за 2004 г.?

Решение. На начало 2004 г. общая страховая сумма составила $850\,000 + 10\,000 = 860\,000$ (руб.). Вычислим необходимый резерв:

$${}_9V^1_{[50]:\overline{20|}} = 860\,000\,\frac{M_{59} - M_{70}}{D_{59}} - G\,\frac{N_{59} - N_{70}}{D_{59}} =$$

$$= 148\,708{,}3 - 860\,000\,\frac{M_{[50]} - M_{70}}{N_{[50]} - N_{70}}\,\frac{N_{59} - N_{70}}{D_{59}} =$$

$$= 148\,708{,}3 - 860\,000 \cdot 0{,}012647 \cdot 8{,}395811 = 57\,390{,}26514 \text{ (руб.)}.$$

Поскольку в соответствии с табл. П.2

$$q_{58} = 1 - 30\,435{,}225 / 30\,795{,}116 = 0{,}011686,$$

то ожидаемое напряжение смертности равно

$$q_{58}(860\,000 - 57\,390{,}26514) =$$

$$= 0{,}011686(860\,000 - 57\,390{,}26514) = 9379{,}297.$$

Так как условие примера означает, что $n_d b_{k+1} = 10\,000$ (руб.), то реальное напряжение смертности составляет

$$10\,000 - n_d \cdot {}_9V^1_{[50]:\overline{20|}} = 10\,000(1 - {}_9V^1_{[50]:\overline{20|}} / 860\,000) =$$

$$= 10\,000(1 - 57\,390{,}26514 / 860\,000) = 9332{,}671 \text{ (руб.)},$$

отсюда прибыль от смертности равна $9379{,}297 - 9332{,}671 = 46{,}626$ (руб.).

Пример. 30 страхователей возраста 57 лет заключили договор страхования дожития на срок 8 лет, страховая сумма по каждому полису равна 100 000 руб. Используя селективные табл. П.2 и П.4, найти ожидаемое напряжение смертности для второго года действия полиса при условии, что через год после покупки полиса все страхователи были живы.

Решение. Поскольку в данном договоре выплаты по смерти отсутствуют, то для каждого полиса ожидаемое напряжение смертности равно

$$-100\,000\,q_{[57]+1}\cdot {}_2V = -100\,000\,q_{[57]+1}\cdot {}_2V.$$

Для страхования дожития резерв

$$ {}_2V = A_{[57]+2:\overset{\;1}{\overline{6|}}} = \frac{D_{65}}{D_{[57]+2}} = \frac{D_{65}}{D_{59}},$$

следовательно, для всей группы полисов искомое напряжение равно

$$-30\cdot 100\,000\cdot q_{[57]+1}\frac{D_{65}}{D_{59}} = -\,30\cdot 100\,000\cdot\left(1-\frac{l_{59}}{l_{[57]+1}}\right)\frac{D_{65}}{D_{59}} =$$

$$= -\,30\cdot 100\,000\cdot 0{,}007483425\cdot(2144{,}171\,/\,3008{,}915) =$$

$$= -30\cdot 100\,000\cdot 0{,}007483425\cdot 0{,}712606139 = -15998{,}20 \text{ (руб.)}.$$

Приложение

ИЛЛЮСТРАТИВНЫЕ АКТУАРНЫЕ ТАБЛИЦЫ (НА ОСНОВЕ УЧЕБНЫХ АКТУАРНЫХ ТАБЛИЦ ИНСТИТУТА И ФАКУЛЬТЕТА АКТУАРИЕВ ВЕЛИКОБРИТАНИИ)

Агрегированная таблица характеристик дожития

Возраст x	l_x	d_x	p_x	q_x	μ_x	$\overset{0}{e}_x$
18	96 514	108	0,99888	0,00112	0,00107	52,45
19	96 406	113	0,99883	0,00117	0,00115	51,51
20	96 293	115	0,99881	0,00119	0,00119	50,57
21	96 178	113	0,99882	0,00118	0,00119	49,63
22	96 065	110	0,99886	0,00114	0,00116	48,69
23	95 955	104	0,99892	0,00108	0,00112	47,74
24	95 851	98	0,99898	0,00102	0,00105	46,80
25	95 753	95	0,99901	0,00099	0,00100	45,84
26	95 658	94	0,99902	0,00098	0,00098	44,89
27	95 564	96	0,99900	0,00100	0,00099	43,93
28	95 468	99	0,99896	0,00104	0,00102	42,98
29	95 369	104	0,99891	0,00109	0,00109	42,02
30	95 265	110	0,99885	0,00115	0,00112	41,06
31	95 155	115	0,99879	0,00121	0,00118	40,11
32	95 040	122	0,99872	0,00128	0,00125	39,16
33	94 918	129	0,99860	0,00136	0,00130	38,21
34	94 789	137	0,99860	0,00145	0,00140	37,26
35	94 652	147	0,99850	0,00155	0,00150	36,31
36	94 505	158	0,99830	0,00167	0,00160	35,37
37	94 347	171	0,99820	0,00181	0,00170	34,43
38	94 176	185	0,99800	0,00196	0,00190	33,49
39	93 991	201	0,99790	0,00214	0,00210	32,55
40	93 790	211	0,99770	0,00235	0,00220	31,62
41	93 579	251	0,99740	0,00259	0,00250	30,70
42	93 328	268	0,99710	0,00287	0,00270	29,77
43	93 060	297	0,99680	0,00319	0,00300	28,86
44	92 763	330	0,99640	0,00356	0,00340	27,95
45	92 433	369	0,99600	0,00399	0,00380	27,05
46	92 064	412	0,99550	0,00448	0,00420	26,15
47	91 652	463	0,99500	0,00505	0,00480	25,27
48	91 189	520	0,99430	0,00570	0,00540	24,40
49	90 669	584	0,99360	0,00644	0,00610	23,53

Таблица П.1

и коммутационных чисел ($i=0{,}04$)

Возраст x	D_x	$\overline{N}_x$	$\overline{C}_x$	$\overline{M}_x$	$\overline{R}_x$
18	47 642	1 033 403	52,6	7111,2	315 085,1
19	45 758	986 708	52,1	7058,6	307 973,9
20	43 947	941 862	51,7	7006,5	300 915,3
21	42 206	898 791	48,6	6954,8	293 908,8
22	40 535	857 426	45,9	6906,2	286 954,0
23	38 931	817 699	40,4	6860,3	280 047,8
24	37 394	779 541	37,6	6819,9	273 187,5
25	35 919	742 891	35,2	6782,3	266 367,6
26	34 503	707 684	33,6	6747,1	259 585,3
27	33 143	673 866	32,9	6713,5	252 838,2
28	31 836	641 381	32,1	6680,6	246 124,7
29	30 580	610 176	32,5	6648,5	239 444,1
30	29 372	580 204	33,0	6616,0	232 795,6
31	28 210	551 417	33,6	6583,0	226 179,6
32	27 092	523 770	34,7	6549,4	219 596,6
33	26 016	497 219	34,0	6514,7	213 047,0
34	24 982	471 723	35,9	6480,7	206 532,5
35	23 986	447 243	36,1	6444,8	200 051,8
36	23 028	423 738	38,1	6408,7	193 607,0
37	22 105	401 175	39,5	6370,6	187 198,3
38	21 216	379 517	40,8	6331,1	180 827,7
39	20 360	358 731	42,7	6290,3	174 496,6
40	19 535	338 786	44,5	6247,6	168 206,3
41	18 740	319 650	47,1	6203,1	161 958,7
42	17 973	301 296	50,8	6156,0	155 755,6
43	17 232	283 696	54,2	6105,2	149 599,6
44	16 516	266 824	57,9	6051,0	143 494,4
45	15 824	250 656	61,6	5993,1	137 443,4
46	15 155	235 168	66,3	5931,5	131 450,3
47	14 507	220 339	72,5	5865,2	125 518,8
48	13 878	206 148	76,7	5792,7	119 653,6
49	13 269	192 576	84,2	5716,0	113 860,9

Возраст x	l_x	d_x	p_x	q_x	μ_x	$\overset{0}{e}_x$
50	90 085	656	0,99270	0,00728	0,00690	22,68
51	89 429	736	0,99180	0,00823	0,00780	21,84
52	88 693	825	0,99070	0,00930	0,00880	21,02
53	87 868	923	0,98950	0,01051	0,00990	20,21
54	86 945	1029	0,98820	0,01184	0,01120	19,42
55	85 916	1144	0,98669	0,01331	0,01263	18,65
56	84 772	1265	0,98508	0,01492	0,01420	17,89
57	83 507	1393	0,98332	0,01668	0,01590	17,16
58	82 114	1526	0,98141	0,01859	0,01776	16,44
59	80 588	1664	0,97935	0,02065	0,01978	15,74
60	78 924	1805	0,97713	0,02287	0,02197	15,06
61	77 119	1947	0,97475	0,02525	0,02433	14,40
62	75 172	2088	0,97222	0,02778	0,02684	13,76
63	73 084	2228	0,96951	0,03049	0,02983	13,14
64	70 856	2366	0,96661	0,03339	0,03243	12,54
65	68 490	2499	0,96352	0,03648	0,03553	11,95
66	65 991	2625	0,96022	0,03978	0,04239	11,39
67	63 366	2745	0,95668	0,04332	0,04239	10,94
68	60 621	2856	0,95288	0,04712	0,04622	10,31
69	57 765	2959	0,94878	0,05122	0,05056	9,79
70	54 806	3051	0,94430	0,05566	0,05490	9,29
71	51 755	3130	0,93950	0,06047	0,05980	8,81
72	48 625	3195	0,93430	0,06570	0,06510	8,35
73	45 430	3243	0,92860	0,07139	0,07140	7,90
74	42 187	3273	0,92240	0,07759	0,07730	7,47
75	38 914	3282	0,91570	0,08434	0,08430	7,05
76	35 632	3266	0,90830	0,09167	0,09200	6,66
77	32 366	3225	0,90040	0,09963	0,10040	6,28
78	29 141	3154	0,89180	0,10824	0,10960	5,92
79	25 987	3054	0,88250	0,11752	0,11960	5,57
80	22 933	2923	0,87250	0,12747	0,13050	5,25

Окончание табл. П.1

Возраст x	D_x	$\overline{N}_x$	$\overline{C}_x$	$\overline{M}_x$	$\overline{R}_x$
50	12676	179605	90,2	5631,8	108144,9
51	12100	167218	97,5	5541,6	102513,1
52	11539	155400	105,2	5444,1	96971,5
53	10992	144136	113,4	5338,9	91527,4
54	10458	133412	121,4	5225,5	86188,5
55	9936,7	123216	129,7	5104,1	80963,0
56	9427,3	113535	138,0	4974,4	75858,9
57	8929,4	104358	146,0	4836,4	70884,5
58	8442,7	95672,6	153,8	4690,4	66048,1
59	7967,2	87468,5	161,3	4536,6	61357,7
60	7502,5	79734,6	168,2	4375,3	56821,1
61	7049,0	72459,7	174,5	4207,1	52445,8
62	6606,8	65632,8	179,9	4032,6	48238,7
63	6176,2	59242,3	184,6	3852,7	44206,1
64	5757,6	53276,4	188,5	3668,1	40353,4
65	5351,3	47723,0	191,5	3479,6	36685,3
66	4957,7	42569,5	193,4	3288,1	33205,7
67	4577,4	37803,1	194,4	3094,7	29917,6
68	4210,7	33410,1	194,5	2900,3	26822,9
69	3858,0	29376,9	193,8	2705,8	23922,6
70	3519,6	25689,3	192,1	2512,0	21216,8
71	3195,8	22332,8	189,5	2319,9	18704,8
72	2887,1	19292,6	186,0	2130,4	16384,9
73	2593,6	16553,6	181,5	1944,4	14254,5
74	2315,9	14100,1	176,3	1762,9	12310,1
75	2054,0	11916,5	169,9	1586,6	10547,2
76	1808,4	9986,7	162,5	1416,7	8960,6
77	1579,5	8294,1	154,4	1254,2	7543,9
78	1367,4	6822,1	145,1	1099,8	6289,7
79	1172,5	5553,5	135,1	954,7	5189,9
80	994,9	4471,2	124,4	819,6	4235,2

Таблица П.2

Селективная таблица ожидаемого числа лиц, доживших до фиксированного возраста

Возраст $[x]$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	Возраст $x+2$
50	32 558,008	32 464,813	32 338,568	52
51	32 383,756	32 282,013	32 143,546	53
52	32 188,740	32 077,958	31 926,430	54
53	31 970,942	31 850,639	31 685,203	55
54	31 728,226	31 597,933	31 417,739	56
55	31 458,342	31 317,610	31 121,815	57
56	31 158,931	31 007,338	30 795,116	58
57	30 827,543	30 664,702	30 435,225	59
58	30 461,645	30 287,215	30 039,787	60
59	30 058,648	29 872,344	29 606,239	61
60	29 615,936	29 417,538	29 132,138	62
61	29 130,898	28 920,265	28 615,051	63
62	28 600,975	28 378,059	28 052,632	64
63	28 023,708	27 788,571	27 442,681	65
64	27 396,808	27 149,632	26 783,206	66
65	26 718,225	26 459,331	26 072,500	67
66	25 986,236	25 716,097	25 309,230	68
67	25 199,536	24 918,797	24 492,529	69
68	24 357,348	24 066,835	23 622,102	70
69	23 459,538	23 160,273	22 698,338	71
70	22 506,732	22 199,940	21 722,421	72
71	21 500,445	21 187,559	20 696,450	73

Таблица П.3

Селективная таблица коммутационных чисел
D_x ($i=0{,}04$)

Возраст [x]	$D_{[x]}$	$D_{[x]+1}$	D_{x+2}	Возраст $x+2$
50	4581,3224	4392,5083	4207,1417	52
51	4381,5413	4199,7841	4020,9326	53
52	4187,6496	4012,7281	3840,1664	54
53	3999,3411	3831,0501	3664,5684	55
54	3816,3261	3654,4752	3493,8796	56
55	3638,3307	3482,7444	3327,8564	57
56	3465,0983	3315,6153	3166,2716	58
57	3296,3898	3152,8628	3008,9150	59
58	3131,9850	2994,2784	2855,5942	60
59	2971,6874	2839,6770	2706,1356	61
60	2815,3028	2688,8874	2560,3853	62
61	2662,6874	2541,7641	2418,2197	63
62	2513,7020	2398,1830	2279,5016	64
63	2368,2373	2258,0445	2144,1713	65
64	2226,2106	2121,2746	2012,1584	66
65	2087,5676	1987,8264	1883,4277	67
66	1952,2839	1857,6818	1757,9716	68
67	1820,3664	1730,8523	1635,8114	69
68	1691,8542	1607,3801	1516,9972	70
69	1566,8197	1487,3388	1401,6093	71
70	1445,3689	1370,8335	1289,7567	72

Таблица П.4

Селективная таблица коммутационных чисел
N_x ($i=0{,}04$)

Возраст $[x]$	$N_{[x]}$	$N_{[x]+1}$	N_{x+2}	Возраст $x+2$
50	73 544,823	68 963,501	64 570,993	52
51	68 945,176	64 563,635	60 353,851	53
52	64 543,296	60 355,647	56 342,918	54
53	60 333,143	56 333,802	52 502,752	55
54	56 308,985	48 827,049	45 344,304	56
55	52 465,379	48 827,049	45 344,304	57
56	48 797,161	45 332,063	42 016,448	58
57	45 299,429	42 003,039	38 850,176	59
58	41 967,525	38 855,540	35 841,261	60
59	38 797,026	35 825,344	32 985,667	61
60	35 783,721	32 968,419	30 279,531	62
61	32 923,597	30 260,910	27 719,146	63
62	30 212,820	27 699,118	25 300,935	64
63	27 647,715	25 279,478	23 021,434	65
64	25 224,747	22 998,537	20 877,262	66
65	22 940,498	20 852,930	18 865,104	67
66	20 791,642	18 839,358	16 981,676	68
67	18 774,923	16 954,557	15 223,705	69
68	16 887,127	15 195,273	13 587,893	70
69	15 125,055	13 558,235	12 070,896	71
70	13 485,489	12 040,120	10 669,287	72

Таблица П.5

Селективная таблица коммутационных чисел
S_x $(i=0{,}04)$

Возраст $[x]$	$S_{[x]}$	$S_{[x]+1}$	S_{x+2}	Возраст $x+2$
50	894 451,04	820 906,22	751 042,72	52
51	820 880,53	751 935,36	687 371,72	53
52	751 906,81	687 363,52	627 007,87	54
53	687 331,90	626 998,76	570 664,95	55
54	626 963,84	570 654,86	518 162,20	56
55	570 616,44	518 151,07	469 324,02	57
56	518 108,94	469 311,78	423 979,71	58
57	469 265,73	423 966,30	381 963,27	59
58	423 916,16	381 948,63	343 113,09	60
59	381 894,20	343 097,17	307 271,83	61
60	343 038,30	307 254,58	274 286,16	62
61	307 191,14	274 267,54	244 006,63	63
62	274 199,42	243 986,60	216 287,48	64
63	243 913,74	216 266,03	190 986,55	65
64	216 188,40	190 963,65	167 965,12	66
65	190 881,28	167 940,78	147 087,85	67
66	167 853,75	147 062,11	128 222,75	68
67	146 970,55	128 195,63	111 241,07	69
68	128 099,77	111 212,64	96 017,37	70
69	111 112,76	95 987,71	82 429,48	71
70	95 884,19	82 398,70	70 358,58	72

Таблица П.6

Селективная таблица коммутационных чисел
C_x ($i = 0{,}04$)

Возраст $[x]$	$C_{[x]}$	$C_{[x]+1}$	C_{x+2}	Возраст $x+2$
50	12,609341	16,424011	24,395920	52
51	13,236384	17,321323	26,115030	53
52	13,857979	18,226081	27,899252	54
53	14,470232	19,133627	29,743892	55
54	15,069130	20,038858	31,643194	56
55	15,650489	20,936317	33,590294	57
56	16,209896	21,820065	35,576898	58
57	16,742839	22,683787	37,593298	59
58	17,244589	23,520583	39,628125	60
59	17,710143	24,323062	41,668139	61
60	18,134448	25,083390	43,698194	62
61	18,512257	25,793162	45,701021	63
62	18,838191	26,443565	47,657146	64
63	19,106779	27,025297	49,544810	65
64	19,312570	27,528698	51,340028	66
65	19,450149	27,943908	53,016515	67
66	19,514298	28,260877	54,545971	68
67	19,500045	28,469657	55,898285	69
68	19,402802	28,560501	57,041926	70
69	19,218626	28,524213	57,944508	71
70	18,944269	28,352395	58,573508	72

Таблица П.7

Селективная таблица коммутационных чисел
M_x ($i = 0{,}04$)

Возраст $[x]$	$M_{[x]}$	$M_{[x]+1}$	M_{x+2}	**Возраст** $x+2$
50	1752,6753	1740,0660	1723,6420	52
51	1729,8038	1716,5674	1699,2461	53
52	1705,2151	1691,3571	1673,1310	54
53	1678,8356	1664,3654	1645,2318	55
54	1650,5959	1635,5267	1615,4879	56
55	1620,4315	1604,7810	1583,8447	57
56	1588,2844	1572,0745	1550,2544	58
57	1554,1041	1537,3613	1514,6775	59
58	1517,8494	1500,6048	1477,0842	60
59	1479,4893	1461,7791	1437,4561	61
60	1439,0058	1420,8713	1395,7879	62
61	1396,3952	1377,8829	1352,0897	63
62	1351,6705	1332,8323	1306,3887	64
63	1304,8637	1285,7569	1258,7316	65
64	1256,0280	1236,7155	1209,1868	66
65	1205,2408	1185,7906	1157,8467	67
66	1152,6054	1133,0911	1104,8302	68
67	1098,2540	1078,7539	1050,2843	69
68	1042,3493	1022,9465	994,3860	70
69	985,0869	965,8683	937,3440	71
70	926,6962	907,7519	879,3995	72

Таблица П.8

Селективная таблица коммутационных чисел
R_x ($i=0{,}04$)

Возраст $[x]$	$R_{[x]}$	$R_{[x]+1}$	R_{x+2}	Возраст $x+2$
50	39 142,860	37 390,185	35 650,119	52
51	37 372,848	35 643,044	33 926,477	53
52	35 623,803	33 918,588	32 227,231	54
53	33 897,301	32 218,465	30 554,100	55
54	32 194,991	30 544,395	28 908,868	56
55	30 518,593	28 898,161	27 293,380	57
56	28 869,894	27 281,610	25 709,536	58
57	27 250,747	25 696,643	24 159,281	59
58	25 663,058	24 145,209	22 644,604	60
59	24 663,058	22 629,299	21 167,520	61
60	22 589,941	21 150,935	19 730,063	62
61	21 108,554	19 712,158	18 334,276	63
62	19 666,689	18 315,018	16 982,186	64
63	18 266,418	16 961,554	15 675,797	65
64	16 909,809	15 653,781	14 417,065	66
65	15 598,910	14 393,669	13 207,879	67
66	14 335,728	13 183,123	12 050,032	68
67	13 122,210	12 023,956	10 945,202	69
68	11 960,213	10 917,864	9 894,918	70
69	10 851,487	9 866,400	8 900,532	71
70	9 797,636	8 870,939	7 963,188	72

Таблица П.9

Показатели страхования на срок для значения $x+n=65$ ($i=0{,}05$)

Селективные показатели					Предельные показатели			
$[x]$	$\ddot{a}_{[x]:\overline{n}\rceil}$	$A_{[x]:\overline{n}\rceil}$	$P_{x:\overline{n}\rceil}$	n	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}$	$A_{x:\overline{n}\rceil}$	$P_{x:\overline{n}\rceil}$	x
64	1,000	0,95238	0,95238	1	1,000	0,95238	0,95238	64
63	1,944	0,90741	0,46668	2	1,934	0,90792	0,46953	63
62	2,835	0,86502	0,30516	3	2,809	0,86624	0,30839	62
61	3,668	0,82532	0,22498	4	3,632	0,82703	0,22769	61
60	4,452	0,78799	0,17699	5	4,409	0,79003	0,17917	60
59	5,191	0,75279	0,14500	6	5,145	0,75501	0,14675	59
58	5,891	0,71948	0,12213	7	5,843	0,72178	0,12354	58
57	6,555	0,68788	0,10495	8	6,506	0,69019	0,10609	57
56	7,185	0,65784	0,09155	9	7,138	0,66010	0,09248	56
55	7,786	0,62923	0,08081	10	7,741	0,63140	0,08157	55
54	8,359	0,60194	0,07201	11	8,316	0,60399	0,07263	54
53	8,907	0,57586	0,06465	12	8,867	0,57777	0,06516	53
52	9,431	0,55092	0,05842	13	9,394	0,55269	0,05884	52
51	9,932	0,52704	0,05306	14	9,898	0,52866	0,05341	51
50	10,412	0,50417	0,04842	15	10,382	0,40563	0,04870	50

Литература

Баскаков В.Н., Карташов Г.Д. Методические указания к решению задач по актуарной математике: (Модели дожития). М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 1997.

Гербер Х. Математика страхования жизни. М.: Мир, 1995.

Завриев С.К., Калихман А.И. Долгосрочное страхование жизни и пенсионное страхование в высокорисковой экономической среде. М.: ЦСО, 1999.

Кагаловская Э.Т., Попова А.А. Страхование жизни: тарифы и резервы взносов. Финансовые основы страхования жизни. М.: Анкил, 2000.

Кудрявцев А.А. Математика страхования жизни. СПб.: Ин-т страхования, 1999. (Актуальные проблемы страхования).

Кутуков В.Б. Основы финансовой и страховой математики: Методы расчета кредитных, инвестиционных, пенсионных и страховых схем. М.: Дело, 1998.

Фалин Г.И. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Анкил, 2002.

Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbit C.J. Actuarial Mathematics. Itasca, Illinois: The Society of Actuaries, 1996.

Учебное издание

Денисов Дмитрий Витальевич,
Котлобовский Игорь Борисович

АКТУАРНЫЕ РАСЧЕТЫ
В СТРАХОВАНИИ ЖИЗНИ

Зав. редакцией *Г.С. Савельева*
Редактор *Т.В. Властовская*
Художественный редактор *Г.Д. Колоскова*
Обложка художника *Н.Н. Аникушина*
Технический редактор *Н.И. Матюшина*
Корректоры *В.В. Конкина*, *Н.И. Коновалова*
Верстка *О.В. Кокоревой*

Подписано в печать 26.03.2013. Формат 60×90 1/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.
Гарнитура Minion. Усл. печ. л. 8,0. Уч.-изд. л. 6,53.
Доп. тираж 200 экз. Изд. № 9898. Заказ 0409.

Ордена «Знак Почета»
Издательство Московского университета.
125009, Москва, ул. Б. Никитская, 5/7.

Тел.: (495) 629-50-91. *Факс*: 697-66-71.
Тел.: (495) 939-33-23 (*отдел реализации*).
E-mail: secretary-msu-press@yandex.ru
Сайт Издательства МГУ: www.msu.ru/depts/MSUPubl2005
Интернет-магазин: http://msupublishing.ru
Адрес отдела реализации:
Москва, ул. Хохлова, 11 (Воробьевы горы, МГУ).
E-mail: izd-mgu@yandex.ru
Тел.: (495) 939-34-93.

Типография МГУ.
119992, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 15